

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ПОСТАНОВКА ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ

Навчальний посібник
для студентів фізичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Харків – 2017

УДК 621.373.826
ББК 32.844я7
П 63

Рецензенти:

С. П. Дюбко – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри квантової радіофізики ХНУ імені В. Н. Каразіна;

Ю. М. Пенкін – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фармакоінформатики Національного фармацевтичного університету.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 10 від 18.04.2015 р.)*

П 63 Постановка експерименту та обробка результатів : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів / А. В. Дегтярьов, М. Г. Кокодій, В. О. Маслов, В. О. Тіманюк – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. – 176 с.

ISBN 978-966-285-379-7

У навчальному посібнику викладено загальні відомості про постановку фізичного експерименту, оформлення звіту про результати вимірювань, методи оцінки похибок вимірювань. Наведено описи лабораторних робіт з розділів загальної фізики – механіки, електромагнетизму, оптики. Посібник спрямовано на вироблення навичок проведення самостійних наукових досліджень у галузі фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей.

Іл. 80, бібл. 22 назв.

УДК 621.373.826
ББК 32.844я7

ISBN 978-966-285-379-7

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2017
© Дегтярьов А. В., Кокодій М. Г., Маслов В. О., Тіманюк В. О., 2017
© Макет обкладинки Дончик І. М., 2017

ЗМІСТ

Загальні вказівки.....	5
Частина 1. Постановка експерименту, оформлення звіту, обробка результатів експерименту.....	6
1. Вимірювання, обчислення, похибки.....	6
1.1. Види вимірювань.....	6
1.2. Похибки вимірювань.....	8
1.3. Чому так важливо оцінити похибку.....	10
1.4. Математична обробка результатів вимірювань.....	10
1.4.1. Прямі одноразові вимірювання.....	10
1.4.2. Випадкова похибка багаторазових прямих вимірювань...	11
1.4.3. Похибка непрямих вимірювань.....	12
1.4.4. Правила запису результатів вимірювань.....	14
1.5. Наближені обчислення.....	15
1.5.1. Похибки при арифметичних операціях.....	16
1.6. Завдання до розділу 1.....	18
1.6.1. Обробка ряду вимірювань.....	18
1.6.2. Порівняння результатів двох рядів вимірювань.....	19
1.6.3. Похибки обчислень і непрямих вимірювань.....	24
2. Правила постановки та проведення експерименту.....	29
2.1. Загальний план експерименту.....	29
2.2. Перевірка апаратури перед експериментом.....	29
2.3. Проведення експерименту.....	29
3. Побудова та аналіз графіків.....	31
3.1. Правила побудови графіків.....	31
3.2. Метод найменших квадратів.....	34
3.2.1. Лінійна залежність МНК.....	36
3.2.2. Похибка визначення параметрів лінійної залежності МНК.....	39
3.2.3. Лінеаризація залежності МНК.....	42
3.2.4. Поліноміальна залежність МНК.....	47
3.3. Завдання до розділу 3.....	53
3.3.1. Лінійна залежність МНК.....	53
3.3.2. Нелінійна залежність МНК.....	57
3.3.3. Поліноміальна залежність МНК.....	61
4. Звіт про виконання лабораторної роботи.....	66
4.1. Правила оформлення звіту.....	66
4.2. Зміст звіту.....	68

Частина 2. Лабораторні роботи.....	71
Робота № 1.	
Вимірювання прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.....	71
Робота № 2.	
Вимірювання внутрішнього опору мікроамперметра.....	83
Робота № 3.	
Обробка результатів вимірювань внутрішнього опору мікроамперметра методом найменших квадратів.....	87
Робота № 4.	
Вивчення електронного осцилографа.....	93
Робота № 5.	
Вимірювання постійних і змінних електричних сигналів.....	103
Робота № 6.	
Вимірювання різниці фаз сигналів.....	110
Робота № 7.	
Вимірювання ємності методом розряду конденсатора через опір.	122
Робота № 8.	
Вимірювання ємності методом аналізу частотної характеристики <i>RC</i> -ланцюга.....	126
Робота № 9.	
Вимірювання питомого опору провідника.....	131
Робота № 10.	
Вимірювання температурного коефіцієнта опору міді.....	136
Робота № 11.	
Дослідження електричних фільтрів.....	141
Робота № 12.	
Вимірювання показника заломлення плексигласу.....	148
Робота № 13.	
Вимірювання довжини хвилі лазерного випромінювання за допомогою дифракційної ґратки.....	153
Робота № 14.	
Вимірювання діаметра та показника заломлення скловолокна....	157
Робота № 15.	
Вимірювання діаметра волокна дифракційним методом в області розсіяння світла вперед.....	169
Література.....	174

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Посібник призначено для студентів факультету радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем, які слухають спецкурс «Постановка експерименту та обробка результатів».

Основна мета курсу – набуття студентами досвіду роботи з експериментальним обладнанням, оформлення результатів експерименту, знайомство з методами обробки результатів експерименту.

Перед початком роботи студентам необхідно усвідомити мету роботи, вивчити методичні вказівки до проведення експерименту, ознайомитися з вимірювальною апаратурою.

Перед проведенням лабораторної роботи студент складає допуск до виконання цієї роботи викладачу. Під час допуску студент повинен показати, що він чітко усвідомив мету роботи, знає теорію питання, вміє обґрунтувати метод вимірювань, може накреслити блок-схему приладу, вміє користуватися вимірювальними приладами.

Після складання допуску студент розпочинає виконання роботи.

Після закінчення роботи викладачеві подаються результати для перевірки та оцінювання виконаної роботи. На наступному занятті студент складає допуск до нової роботи та письмовий звіт про попередню роботу.

Загальні вимоги техніки безпеки

У лабораторних роботах використовуються джерела напруги, величина якої може бути небезпечною для життя. Студенти, які не вивчили інструкції з техніки безпеки, до роботи не допускаються.

Робота на кожному приладі проводиться тільки в присутності викладача або лаборанта. Забороняється знаходження поблизу приладу, що працює, сторонніх осіб.

У процесі роботи при включеному приладі забороняється:

1. Залишати прилад, що знаходиться під напругою, без нагляду.
2. Закорочувати або відключати блокувальні пристрої.
3. Відкривати корпус вимірювального приладу.

ЧАСТИНА 1

1

ПОСТАНОВКА ЕКСПЕРИМЕНТУ, ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ, ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

1. Вимірювання, обчислення, похибки

Історія розвитку науки та техніки свідчить, що їх прогрес нерозривно пов'язаний з можливостями вимірювань. Відомі приклади, коли створення нового приладу спричинило глибокі зміни у розвитку науки. Так, створення Майкельсоном інтерферометра та проведення на ньому вимірювань швидкості світла стало поштовхом до створення теорії відносності. А виникнення нових галузей науки та техніки завжди тягне за собою розробку нових методів вимірювань і вимірювальних приладів.

Особливо важлива роль належить електричним вимірювальним приладам. Вони є гнучкими у користуванні і мають значно більше можливостей, ніж прилади будь-яких інших систем.

1.1. Види вимірювань

Вимірювання – це процедура порівняння вимірюваної величини з іншою величиною, прийнятою за одиницю.

Вимірювання поділяються на *прямі*, *непрямі*, *спільні* та *сукупні*.

При *прямих* вимірюваннях досліджувану величину порівнюють з одиницею вимірювань за допомогою приладу, що градується у відповідних одиницях. Значення вимірюваної величини зчитуються безпосередньо зі шкали приладу.

Приклади: вимірювання часу секундоміром, вимірювання довжини лінійкою, вимірювання швидкості спідометром.

При *непрямих* вимірюваннях шукана величина обчислюється за результатами прямих вимірювань інших величин, пов'язаних з вимірюваною величиною функціональною залежністю.

Приклади непрямих вимірювань.

1. Вимірювання потужності P у ланцюгу постійного або змінного струму за допомогою амперметра та вольтметра (рис. 1.1).

2. Визначення струму I_x з падіння напруги U на зразковому опорі R_0 (рис. 1.2).

Спільними називають вимірювання, при яких вимірюються кілька різнорідних фізичних величин.

Приклад: визначення матеріалу дротяного опору. Вихідними даними для визначення матеріалу є:

1) питомий опір:

$$\rho = R_0 \frac{S}{l}, \quad (1.1)$$

де R_0 – опір при температурі 0°C ,
 S – поперечний переріз провідника,
 l – довжина провідника;

2) температурний коефіцієнт опору (ТКО) – α .

Рівнянням для розрахунку є вираз для опору при температурі θ :

$$R_\theta = R_0(1 + \alpha \Delta\theta) = R_0 + \Delta R(\theta), \quad (1.2)$$

де $\Delta\theta$ – приріст температури провідника.

Порядок вимірювань і розрахунку

1. Визначаємо R_0 і α . Для цього необхідно провести вимірювання опору при температурах θ_1 і θ_2 і побудувати графік $R_\theta = f(\theta)$ (рис. 1.3).

Пряма лінія, яку проведено через точки 1 і 2, відповідні значенням опорів R_1 і R_2 при температурах θ_1 і θ_2 відповідно, перетинає вісь ординат у точці R_0 . Температурний коефіцієнт α можна визначити з рівняння $\Delta R = R_1 \alpha \Delta\theta$:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_1 \Delta\theta}.$$

2. За формулою (1.1) визначаємо питомий опір.

3. У довідкових матеріалах за даними ТКО і за питомим опором знаходимо матеріал дротяного опору.

$$P = UI [\text{А}\cdot\text{В}]$$

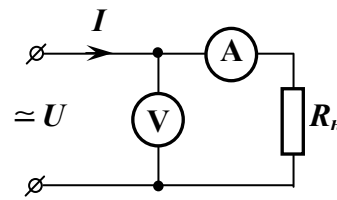


Рис. 1.1. Вимірювання потужності методом амперметра-вольтметра

$$I_s = \frac{V}{R_0} (\text{А})$$

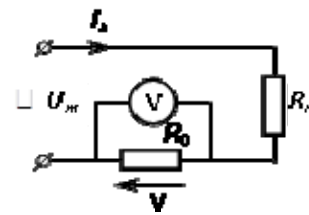


Рис. 1.2. Вимірювання струму в електричному ланцюгу

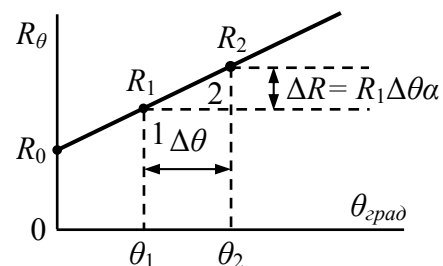


Рис. 1.3. Залежність опору провідника від температури

Сукупними називають одночасні вимірювання декількох *одно-йменних* величин. Їх значення знаходять розв'язавши систему рівнянь, отриманих при прямих або непрямих вимірюваннях різних сполучень цих величин. Наприклад, вимірюючи опори R_{ab} , R_{ac} та R_{bc} між вершинами трикутника електричного ланцюга, в якому з'єднані опори резисторів R_1 , R_2 і R_3 (рис. 1.4), можна визначити шукані значення опорів R_1 , R_2 і R_3 , розв'язавши таку систему рівнянь:

$$R_{ab} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{ac} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{bc} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

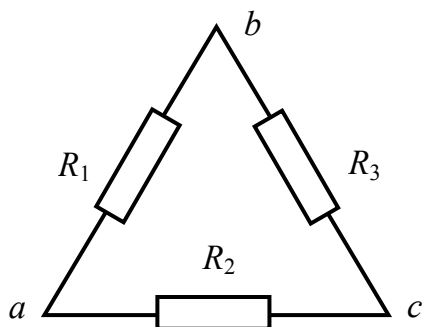


Рис. 1.4. До методу сукупних вимірювань

Як видно з визначень, сукупні та спільні вимірювання схожі між собою. В обох випадках шукані значення знаходять у результаті розв'язку системи рівнянь, коефіцієнти в яких отримані шляхом прямих вимірювань. Відмінність полягає в тому, що при сукупних вимірюваннях одночасно визначають декілька *одноіменних* величин, а при спільних – *різноїменних*.

1.2. Похибки вимірювань

Результат вимірювань (величина x) є алгебраїчною сумою істинного значення вимірюваної величини x_{icm} і похибки Δx [1-5]:

$$x = x_{icm} \pm \Delta x.$$

Величина Δx називається *абсолютною похибкою*. Вона має ту ж саму розмірність, що і вимірювана величина.

Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини: $\Delta x/x_{icm}$.

При вимірюваннях виникають похибки наступних видів.

1. *Систематичні похибки* залишаються постійними або закономірно змінюються в процесі вимірювань. Їх можна поділити на інструментальні та методичні. Якщо при обчисленні дальності польоту снаряда з гармати не враховувати опір повітря, буде допущено методичну похибку. При вимірюваннях стрілковим приладом зі зміщеним нулем буде присутня приладова похибка.

Кожен прилад характеризується власною похибкою – класом точності. Це означає, що його показання весь час будуть дещо вищі або нижчі істинного значення на величину, яка визначається цим параметром.

Клас точності γ – це відношення абсолютної похибки Δx до граничного значення x_D вимірюваної величини – найбільшого значення шкали приладу:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_D} \cdot 100\%.$$

Він вказується на шкалі приладу або в технічному паспорті. Знаючи клас точності (наприклад, 0,2), можна визначити абсолютну похибку:

$$\Delta x = \frac{\gamma x_D}{100}.$$

На таку величину прилад весь час завищує або занижує значення вимірюваної фізичної величини.

2. *Випадкові похибки* змінюються випадковим чином від одного вимірювання до іншого внаслідок неконтрольованих перешкод, вплив яких на процес вимірювання неможливо врахувати.

На рис. 1.5а на числовій осі рисочками показані результати п'яти вимірювань і фактичне значення вимірюваної величини, якщо є тільки випадкові похибки, а на рис. 1.5б – результати вимірювань у випадку, якщо є як випадкова, так і систематична похибка.

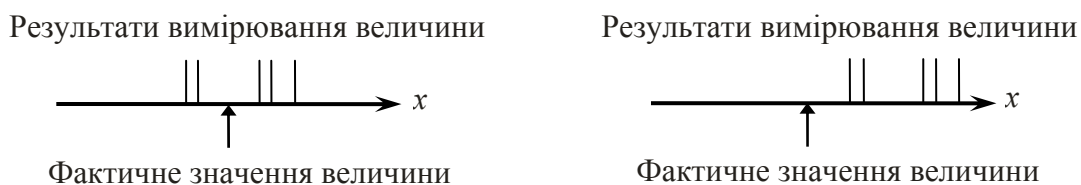


Рис. 1.5. Створення вимірюваної величини x похибками:
а – випадковими,
б – систематичними та випадковими

3. *Промахи* – великі помилки, що виникають, наприклад, при неправильному відліку по шкалі приладу, неправильному записі результату, при помилках в обчисленнях. Результати таких вимірювань треба скасувати і повторювати вимірювання.

1.3. Чому так важливо оцінити похибку

Вимірюючи якусь фізичну величину, не можна отримати її справжнє значення. Тому необхідно вказати значення похибки вимірювань. Нехай, наприклад, фокусна відстань лінзи дорівнює

$$f = 256 \pm 2 \text{ мм.} \quad (1.3)$$

Це означає, що величина f лежить в інтервалі від 254 до 258 мм. Але рівність (1.3) має імовірнісний сенс. Можна стверджувати, що величина f лежить в цьому інтервалі лише з певною ймовірністю. Нижче це положення буде сформульовано точніше.

Оцінювати похибки необхідно тому, що, не знаючи, які вони, не можна зробити певних висновків з результатів експерименту. Нехай, наприклад, ми хочемо встановити, чи залежить опір провідника від температури на підставі наступних результатів вимірювань:

$$R = 20,13 \text{ Ом при } 10 \text{ }^\circ\text{C,}$$

$$R = 20,42 \text{ Ом при } 20 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Чи слід надавати значення різниці цих величин, значима вона? На це питання не можна відповісти, не знаючи похибки вимірювань. Якщо вона становить 0,1 Ом, то різниця є значущою, а якщо вона дорівнює 1 Ом, то нічого певного сказати не можна.

Коли ставиться дослід, експериментатор повинен уявляти собі, якою має бути похибка отриманих результатів. Не завжди треба намагатися досягти найвищої точності.

Припустимо, у наведеному прикладі треба знати опір дроту, щоб використовувати його як датчик для вимірювання температури в діапазоні температур від 10 °С до 20 °С, а похибка вимірювань має не перевищувати 1,5 %. Мету буде досягнуто, якщо вимірювати опір з похибкою 0,1 Ом, а спроба знизити цю похибку до 0,01 Ом буде даремною витратою зусиль і часу. У той же час вимірювати опір з похибкою 1 Ом неприпустимо, оскільки поставлену мету не буде досягнуто.

1.4. Математична обробка результатів вимірювань

1.4.1. Прямі одноразові вимірювання

1. За значення вимірюваної величини приймаються показання приладу $x_{аді \text{ } \delta}$.

2. Абсолютна похибка знаходиться, виходячи з класу точності приладу γ :

$$\Delta x = \gamma x_{\text{вимір}} / 100.$$

3. Форма запису результату вимірювань:

$$x = x_{\text{вимір}} \pm \Delta x.$$

1.4.2. Випадкова похибка багаторазових прямих вимірювань

Нехай при повторенні вимірювань фізичної величини X в однакових умовах були отримані значення

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N,$$

де n – номер вимірювання, N – кількість вимірювань.

Послідовність обробки результатів вимірювань є наступною.

1. Обчислюється середнє арифметичне значення вимірюваної величини:

$$x_{\text{сеп}} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n}{N}. \quad (1.4)$$

2. Знаходиться середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x_n - x_{\text{сеп}})^2}{N-1}}. \quad (1.5)$$

3. Задається значення довірчої ймовірності P (ймовірності того, що результат попадає в інтервал, який визначається абсолютною похибкою Δx).

4. З табл. 1.1 знаходиться значення коефіцієнта Стюдента t , який залежить від довірчої ймовірності P і кількості вимірювань N .

5. Знаходиться значення абсолютної похибки:

$$\Delta x = \frac{t S}{\sqrt{N}}. \quad (1.6)$$

6. Обчислюється відносна похибка $\frac{\Delta x}{x_{\text{сеп}}}$.

Приклад 1.1

<i>n</i>	x_n	$(x_n - x_{\text{сеп}})^2$
1	1,26	0,0523
2	1,18	0,0221
3	0,97	0,0038
4	1,01	0,0005
5	0,84	0,0366
6	0,96	0,0051
7	1,11	0,0062
8	0,92	0,0124
$N = 8$	$\sum_{n=1}^N x_n = 8,25$	$\sum_{n=1}^N (x_n - x_{\text{сеп}})^2 = 0,1390$

$$x_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n}{N} = \frac{8,25}{8} = 1,031,$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x_n - x_{\text{сеп}})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{0,1390}{7}} = 0,141,$$

$$P = 0,95, \quad t = 2,4,$$

$$\Delta x = \frac{t S}{\sqrt{N}} = \frac{2,4 \cdot 0,141}{\sqrt{8}} = 0,120.$$

Результат:

$$x = 1,03 \pm 0,14, \quad \frac{\Delta x}{x_{\text{сеп}}} = \frac{0,120}{1,031} = 0,12 = 12\%.$$

Таблиця 1.1

Коефіцієнти Стьюдента $t (P; N)$

Кількість вимірювань, <i>N</i>	Довірча ймовірність <i>P</i>								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	
2	1,0	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	
4	0,77	0,98	1,2	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	
9	0,71	0,89	1,1	1,4	1,8	2,3	2,9	3,4	
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	

1.4.3. Похибка непрямих вимірювань

Нехай вимірювана величина z є функцією величин a, b, c, \dots , вимірюваних з похибками $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$.

Абсолютна похибка величини z оцінюється за формулою:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots} \quad (1.7)$$

Приклад 1.2

Вимірюється опір провідника з використанням закону Ома:

$$r = \frac{U}{i}. \quad (1.8)$$

Напруга вимірюється вольтметром з похибкою ΔU , струм – амперметром з похибкою Δi .

Використовуючи вираз (1.7), отримаємо

$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial i} \Delta i\right)^2}. \quad (1.9)$$

Знайдемо часткові похідні функції (1.8):

$$\frac{\partial r}{\partial U} = \frac{1}{i}, \quad \frac{\partial r}{\partial i} = -\frac{U}{i^2}.$$

Підставимо їх у (1.9):

$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{1}{i} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U}{i^2} \Delta i\right)^2} = \frac{U}{i} \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2}. \quad (1.10)$$

Нехай виміряні значення напруги та струму були такими:

$$U = 3,26 \pm 0,05 \text{ В}, \quad i = 0,15 \pm 0,02 \text{ А}.$$

Підстановка цих результатів у формули (1.8) і (1.10) дає

$$r = 21,73 \text{ Ом}, \quad \Delta r = 0,134 \text{ Ом}.$$

1.4.4. Правила запису результатів вимірювань

Значущі цифри. Значущими називаються цифри 1, 2, 3, ... , 9, а також 0, якщо цифра 0 стоїть у середині числа або в його кінці. Кількість значущих цифр у числі визначає його точність.

Правила округлення чисел

1. Якщо перша цифра, що відкидається, менше п'яти, то попередня цифра не змінюється:

$$3,14159 \approx 3,14.$$

2. Якщо перша цифра, що відкидається, – п'ять, а за нею стоять інші цифри або вона більше п'яти, то попередня цифра збільшується на одиницю:

$$3,14159 \approx 3,142.$$

3. Якщо відкидається єдина цифра п'ять, то попередня цифра не змінюється, якщо вона є парною, і збільшується на одиницю, якщо вона є непарною:

$$6,725 \approx 6,72, \quad 6,735 \approx 6,74.$$

4. Якщо при округленні останні цифри, що зберігаються, – нулі, то їх слід записувати:

$$1,2997 \approx 1,300.$$

Результат проміжного розрахунку округляють принаймні на одну цифру точніше, ніж точність вихідних даних.

Нехай треба записати результат розрахунку $r = x y$, де $x = 0,00785$, $y = 549225$. Цей результат буде використовуватися в подальших розрахунках. Виходить $z = 4311,41625$. Число x містить 3 значущі цифри, число y містить 6 значущих цифр. Найбільша точність у вихідних даних – 6 значущих цифр. Результат обчислень має бути записаний на один порядок точніше. Отже, він має бути заокруглений наступним чином: $z = 4311,416$. Подальші розрахунки слід проводити з такою ж або більшою точністю.

При записі результату вимірювань спочатку визначається похибка. Похибка округляється до двох значущих цифр, якщо перша з них –

одиниця чи двійка. Похибка округляється до однієї значущої цифри в усіх інших випадках.

Приклад 1.3

Похибка $\Delta x = 0,05789$. Перша значуща цифра – 5. Отже, значення Δx округляємо до однієї значущої цифри: $\Delta x = 0,06$.

Приклад 1.4

Похибка $\Delta x = 179$. Перша значуща цифра – 1. Отже, округляємо до двох значущих цифр: $\Delta x = 180$.

Після округлення похибки округляється значення вимірної величини. Вона округляється до того ж розряду, що і похибка.

Приклад 1.5

$x = 34792 \pm 179$. Після округлення – $x = 34790 \pm 180$. Похибка округлена до десятків. Отже, і значення вимірної величини має бути округлене до десятків.

Приклад 1.6

$x = 34,792 \pm 0,0579$. Після округлення – $x = 34,80 \pm 0,06$. Похибка округлена до сотих. Отже, значення вимірної величини також має бути округлене до сотих. У даному прикладі нуль у значенні результату вимірювань після округлення обов'язково вказується.

1.5. Наближені обчислення

Під час проведення обчислень з використанням наближених чисел слід дотримуватися певних правил.

1. Завжди визначати точність результату.
2. Використовувати, якщо це можливо, математичні методи та формули, що забезпечують більшу точність.
3. Не вимагати більшої точності, ніж це необхідно.
4. Пам'ятати, що точність результату визначається найменш точною складовою.

Нехай, наприклад, розміри сторін прямокутника такі:

$$a = 6,221 \pm 0,005 \text{ см}, \quad b = 5,2 \pm 0,5 \text{ см}.$$

Похибка обчислення площі прямокутника буде визначатися похибкою визначення сторони b :

$$S = 32 \pm 3 \text{ см}^2.$$

Результат містить дві вірні цифри, як і значення сторони b .

5. При множенні та діленні точність результату визначається кількістю значущих цифр операндів.

6. При додаванні та відніманні має значення кількість знаків у операндів після коми:

$$20,4 + 1,322 = 21,722 \approx 21,7.$$

7. Абсолютна похибка визначає кількість знаків після коми.

8. Відносна похибка визначає кількість значущих цифр.

Якщо похибка числа не вказана, вона дорівнює половині одиниці молодшого розряду. Наприклад, похибка числа $\pi = 3,142$ дорівнює $0,0005$.

9. Остаточний результат округляють, залишаючи, крім вірних цифр, одну сумнівну. Так, число $x = 4,85738$ при похибці $x = 0,0006$ слід записати так:

$$x = 4,8574 \pm 0,0006.$$

1.5.1. Похибки при арифметичних операціях

1. При додаванні складаються абсолютні похибки операндів. Нехай $a = a_0 \pm \Delta a$, $b = b_0 \pm \Delta b$. Тоді:

$$S = a_0 + b_0, \quad \Delta S = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}.$$

При відніманні абсолютні похибки операндів також складаються:

$$R = a_0 - b_0, \quad \Delta R = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}.$$

Тому при відніманні близьких за значеннями чисел відносна похибка результату може бути дуже великою.

Приклад 1.7

Нехай $a = 1348 \pm 1$, $b = 1346 \pm 1$. Похибка результату при відніманні цих чисел $\Delta R = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,4$, так що

$$R = a - b = 2 \pm 1,4.$$

Значення результату знаходиться у великому інтервалі – від 0,6 до 3,4.

У деяких випадках похибку результату при відніманні можна зменшити, перетворивши формулу, за якою проводяться обчислення.

Приклад 1.8

Обчислити величину $y = 1 - \cos x$ для $x = 2^\circ$. Знайшовши $\cos x = 0,9994$ з точністю до чотирьох знаків після коми, отримуємо

$$y = 1 - 0,9994 = 0,0006.$$

Результат має лише одну значущу цифру. Оцінка його похибки дає

$$\Delta y = 0,00005,$$

так що значення лежить в інтервалі $0,00055 < y < 0,00065$.

Похибку результату можна зменшити, якщо скористатися тригонометричної формулою

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

Тоді $\frac{x}{2} = 1^\circ$, $\sin \frac{x}{2} = 0,01745$, $y = 0,000609$. Оцінка його похибки за формулою для непрямих вимірювань дає

$$\Delta y = 0,000002.$$

У цьому випадку значення y лежить в інтервалі $0,000607 < y < 0,000611$, який набагато менше, ніж у першому випадку.

Приклад 1.9

Обчислити значення функції $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ при $x = 500$. При обчисленнях виразу в дужках беремо 6 значущих цифр.

Правильний результат з точністю до 15 цифр після коми такий:

$$f(500) = 11,174755300747198.$$

У результаті обчислень при використанні 6 значущих цифр виходить:

$$f(500) = 500 \cdot (\sqrt{501} - \sqrt{500}) = 500 \cdot (22,3830 - 22,3607) = 11,15.$$

В отриманому результаті тільки три цифри є правильними, хоча у вихідних даних їх було п'ять (шоста є сумнівною).

Функцію $f(x)$ можна перетворити таким чином:

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

В отриманому виразі немає різниць чисел. При використанні в обчисленнях 6 значущих цифр отримаємо

$$f(500) = \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} = 11,17475756.$$

Цей результат відрізняється від правильного на 3 одиниці в шостій цифрі після коми, що значно краще, ніж при обчисленнях за першою формулою.

2. При множенні та діленні складаються *відносні* помилки операндів.

Нехай $a = a_0 \pm \Delta a$, $b = b_0 \pm \Delta b$. Тоді

$$P = a_0 b_0, \quad \frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^2},$$

$$Q = \frac{a_0}{b_0}, \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^2}.$$

1.6. Завдання до розділу 1

1.6.1. Обробка ряду вимірювань

1.1. Обробити ряди вимірювань, наведені в табл. 1.2 та 1.3. Знайти такі величини:

- середнє значення;
- середнє квадратичне відхилення;
- абсолютну похибку;
- відносну похибку.

Записати отриманий результат з урахуванням округлення значень похибки та вимірюваної величини.

Значення довірчої ймовірності прийняти рівним 0,95.

Таблиця 1.2

Ряди вимірювань 1

n	Варіант													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	9,65	12,36	10,42	25,46	15,05	19,45	45,14	31,16	17,45	10,12	16,45	22,18	31,43	41,26
2	10,13	14,11	9,56	27,12	15,96	18,76	46,28	30,78	18,52	11,46	18,93	23,50	35,16	43,32
3	8,45	13,58	8,95	24,86	16,27	18,05	46,93	28,34	19,36	13,52	15,36	20,86	35,90	44,28
4	11,02	11,25	11,20	26,95	14,08	21,15	44,55	29,18	19,85	11,07	17,50	25,45	32,16	42,30
5	9,10	15,09	12,45	25,18	17,11	20,19	43,28	32,76	17,03	9,48	16,02	21,23	30,23	40,18
6	10,11	12,10	9,12	25,26	18,12	20,84	47,12	35,12	16,28	12,33	20,46	22,18	32,16	40,26
7	12,03	12,96	10,52	25,48	16,02	19,24	48,36	31,18	20,16	8,35	18,76	19,43	33,54	45,57
8	10,53	11,25	11,93	26,08	15,36	18,45	50,23	28,93	18,43	11,02	16,45	19,56	34,19	44,20
9	9,45	11,48	12,02	24,50	14,87	21,76	49,12	27,16	18,05	10,46	14,82	21,35	33,18	44,75
10	–	13,25	10,86	26,12	–	21,53	47,45	30,46	16,96	12,03	16,35	24,16	–	–
11	–	14,20	–	–	–	–	48,16	–	–	10,55	–	23,96	–	–

Таблиця 1.3

Ряди вимірювань 2

n	Варіант															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1,20	2,18	3,08	4,03	5,17	6,16	7,02	8,07	9,14	10,10	11,1	12,6	13,6	14,4	15,0	16,9
2	1,02	2,19	3,14	4,06	5,06	6,12	7,17	8,05	9,13	10,20	11,6	12,7	13,6	15,0	15,4	16,0
3	1,00	1,89	3,00	3,96	5,00	5,89	6,94	7,95	8,89	9,83	10,5	11,4	12,5	13,4	14,2	15,1
4	1,11	2,09	3,06	4,10	5,08	6,14	7,10	8,19	9,01	10,20	11,3	12,5	13,5	14,2	15,9	16,2
5	0,88	1,83	2,88	3,91	4,99	6,00	6,96	8,00	8,95	9,91	10,7	11,8	12,1	13,7	14,3	15,9
6	1,03	2,16	3,17	4,12	5,17	6,07	7,20	8,03	9,17	10,10	11,6	12,5	13,3	14,7	15,7	16,1
7	0,91	1,80	2,90	3,92	4,92	5,85	6,87	8,00	8,98	9,91	10,0	11,3	12,3	13,6	14,0	15,4
8	1,01	2,12	3,15	4,17	5,12	6,17	7,04	8,13	9,14	10,00	11,2	12,6	13,6	14,7	15,4	16,7
9	1,16	2,05	3,09	4,12	5,18	6,14	7,06	8,08	9,17	10,02	11,7	12,8	13,6	14,5	15,9	16,7
10	1,10	2,17	3,15	4,01	5,12	6,18	7,17	8,02	9,06	10,00	11,8	13,0	13,6	14,8	15,5	16,8

1.6.2. Порівняння результатів двох рядів вимірювань

У завданнях 1.2–1.21 провести порівняння середніх значень двох рядів вимірювань і встановити на підставі величини похибки їх вимірювань, чи є між ними статистично значуща відмінність, чи ні.

1.2. У 1893 і 1894 рр. Релей отримав азот з повітря і виділив його з азотистої кислоти. Значення густини азоту, отриманого з повітря, були: 2,30986, 2,31001, 2,31010, 2,31017, 2,31012, 2,31024, 2,31026, 2,31027, 2,31035, а значення густини азоту, виділеного з азотистої кислоти, дорівнюють

2,29816 2,29890, 2,31043, 2,30182, 2,29869, 2,29940, 2,29849, 2,29889. На основі цих даних Релей зробив висновок, що атмосферний азот важчий від азоту, отриманого хімічним шляхом, і таким чином підійшов до відкриття інертних газів.

Чи був його висновок статистично обґрунтованим? Вважати $P = 0,95$.

1.3. Швидкість обертання валу, виміряна абсолютним методом, становить 1010 об / хв. Стробоскопічний та ручний тахометри дають наступні результати.

Стробоскопічний тахометр, об / хв	1000	980	995	1020	1005
Ручний тахометр, об / хв	990	1020	1000	1010	1040

Установити, чи узгоджуються ці результати між собою і з результатами вимірювань абсолютним методом. Вважати $P = 0,95$.

1.4. Радіолампи одного і того ж типу в металевому та скляному корпусах перевірялися на довговічність. Було отримано наступні результати (в годинах).

Лампи в металевих корпусах	53	40	92	67	89
Лампи в скляних корпусах	45	40	47	–	–

Чи є однаковою тривалість їхньої роботи? Вважати $P = 0,95$.

1.5. Прилади А і Б використовувалися для вимірювання теплоємності. Отримано наступні результати.

А, Дж / (кг·К)	14,23	14,12	14,32	14,15	14,26	14,33	–
Б, Дж / (кг·К)	13,88	13,71	13,72	13,41	14,23	13,39	13,72

Чи узгоджуються між собою результати вимірювань? Який прилад є кращим з точки зору стабільності показань? Вважати $P = 0,95$.

1.6. У десяти послідовних дослідах з вимірювання частоти скорочень серця у дафнії було отримано наступні результати:

$$f_1 = 121, 116, 117, 123, 117, 125, 114, 125, 115, 127 \text{ ударів / хв.}$$

Через півгодини з посудини, в якій містилися дафнії, випарувалося певна кількість рідини і концентрація речовин, що містяться в ній,

підвищилася. Дослід було повторено, і результати вимірювань виявилися наступними:

$$f_2 = 129, 119, 122, 128, 122, 116, 131, 130, 120, 133 \text{ ударів / хв.}$$

Визначити, чи впливає концентрація розчину на частоту скорочень серця дафнії. Вважати $P = 0,95$.

1.7. Чи є правильним твердження що певні числа, що показуються людям у випадковому порядку, сприймаються швидше одним із зорових полів – правим або лівим? Чи це не так? Вважати $P = 0,9$.

В експерименті одержано такі результати вимірювань часових реакцій для лівого і правого ока, мс.

Ліве	564	521	495	564	560	481	545	478	580	484	539	467
Праве	557	505	465	562	544	448	531	458	560	485	520	445

1.8. При вимірюванні продуктивності двох агрегатів отримані наступні результати (у кг речовини за 1 час роботи).

Агрегат А	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат Б	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Порівняти продуктивності цих агрегатів. Вважати $P = 0,9$

1.9. При дослідженні двох типів покриттів у телевізійних трубках отримано наступні результати вимірювання питомої провідності покриття (в умовних одиницях).

I тип	6	15	12	9	10	–
II тип	14	11	0	5	6	8

Чи можна на підставі цих даних вважати, що тип покриття впливає на питому провідність. Вважати $P = 0,9$.

1.10. Щоб визначити, який вплив має температура навколишнього середовища на систематичну помилку кутоміра, проведено вимірювання кутового розміру об'єкта δ вранці ($t = 10^\circ\text{C}$) і вдень ($t = 26^\circ\text{C}$). Результати вимірювань (в кутових секундах) виявилися наступними.

Вранці	38,2	36,4	37,7	36,1	37,9	37,8	–	–
Днем	39,5	38,7	37,8	38,6	39,2	39,1	38,9	39,2

Чи можна вважати, що температура навколишнього середовища впливає на систематичну похибку кутоміра? Вважати $P = 0,95$.

1.11. Нижче наведено час (у секундах) виконання контрольних завдань одинадцятьма учнями до і після спеціальних вправ. Чи можна вважати, що ці вправи покращили здібності учнів? Вважати $P = 0,95$.

До вправ	87	61	98	90	93	74	83	72	81	75	83
Після вправ	50	45	79	90	88	65	52	79	84	61	52

1.12. Для 10 чоловік була запропонована спеціальна дієта. Після двотижневого харчування маса їх тіла змінилася таким чином.

Маса до дієти, кг	68	80	92	81	70	79	78	66	57	76
Маса після дієти, кг	60	84	87	79	74	71	72	67	57	70

Чи має ця дієта вплив на масу тіла? Вважати $P = 0,9$.

1.13. Порівнювалася дія двох екстрактів вірусу тютюнової мозаїки на листя рослин. Кількість уражених місць наводиться нижче.

Екстракт А	20	39	43	13	28	26	17	49	36
Екстракт Б	31	22	45	6	21	13	17	46	31

Чи можна вважати, що дія цих екстрактів є різною? Вважати $P = 0,9$.

1.14. Вивчався вплив чорного і квітневого пару на урожай жита. Дослід тривав 6 років. Вимірювалася маса 1000 зерен у грамах. Результати дослідження є наступними.

Рік посіву	1	2	3	4	5	6
З чорного пару	31,1	24,0	24,6	28,6	29,1	30,1
З квітневого пару	31,6	24,2	24,8	19,1	29,9	31,0

Чи можна вважати, що врожай жита з квітневого пару вище, ніж з чорного? Вважати $P = 0,95$.

1.15. Перевірити припущення про те, що лікувальний препарат змінює склад крові (зокрема, кількість лейкоцитів). Препарат випробовувався на 10 об'єктах. Аналіз крові дав наступні результати:

0,97 1,05 1,09 0,88 1,01 1,14 1,03 1,07 0,94 1,02.

Числа виражають відношення числа лейкоцитів у досліді до числа лейкоцитів у нормі. Вважати $P = 0,95$.

1.16. Зміна врожайності при застосуванні одного з видів передпосівної обробки насіння характеризується наступними даними (у центнерах з гектара).

Рік	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Необроблене насіння	20,0	17,9	20,6	22,0	21,4	23,8	21,4	19,8	18,4
Оброблене насіння	22,1	18,5	19,4	22,1	21,7	24,9	21,6	20,3	18,3

Чи можна вважати, що передпосівна обробка підвищує врожайність? Вважати $P = 0,95$.

1.17. Кількість помилок при відповідях за матеріалом, поясненим на уроках у 7-м і 10-му класах, подається в таблиці.

7 клас	39,1	41,2	45,2	46,2	48,4	48,7	55,0	40,6	52,1	47,2
10 клас	35,2	39,2	40,9	38,1	34,4	29,1	41,8	24,3	32,4	32,6

Чи однаково уважними є учні? Вважати $P = 0,95$.

1.18. Вимірювалася напруга пробою діодів з двох партій. Результати вимірювань (у вольтах) є такими.

I партія	50	41	48	60	46	60	51	42	62	54	42	46
II партія	38	40	47	51	63	50	63	57	59	51	—	—

Чи є підстави стверджувати, що напруга пробою у діодів обох партій є різною? Вважати $P = 0,9$.

1.19. У польових транзисторів з двох партій, виготовлених за різними технологіями, вимірювався диференціальний опір каналу R_t . Результати вимірювань (у мкОм) є такими.

Технологія А	0,01	0,02	0,12	0,30	0,29	0,15	0,21	—
Технологія Б	0,15	0,07	0,25	0,15	0,22	0,18	0,18	0,27

Чи впливає технологія на величину R_t ? Вважати $P = 0,95$.

1.20. У біохімічному дослідженні, проведеному методом мічених атомів, за результатами вивчення 8 препаратів дослідної та контрольної серій отримано наступні показання лічильника імпульсів (в імпульсах за хвилину).

Дослід	340	343	322	349	332	320	313	304
Контроль	318	321	318	301	312	—	—	—

Чи можна вважати отримані значення дослідної та контрольної серії різними? Вважати $P = 0,9$.

1.21. Довжина тіла личинок коника, які живуть у посівах озимого жита та проса, варіюється наступним чином, мм.

У посівах жита	7	10	14	15	12	16	12
У посівах проса	11	12	16	13	18	15	–

Створюється враження про більший розмір личинок коників, що мешкають на просі. Перевірити це припущення, вважаючи $P = 0,99$.

1.6.3. Похибки обчислень і непрямих вимірювань

1.22. Розмір сторони куба x , об'єм якого V , можна знайти за формулою

$$x = \sqrt[3]{V}.$$

Вивести формулу для абсолютної та відносної похибок величини x .

1.23. Вивести формулу для абсолютної похибки суми трьох чисел:

$$s = a + b + c.$$

1.24. Вивести формулу для відносної похибки добутку:

$$p = a \cdot b.$$

1.25. Вивести формулу для відносної похибки частки:

$$R = \frac{a}{b}.$$

1.26. Рівняння загасаючих коливань напруги має такий вигляд:

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Знайти значення функції $f(t)$ при $t = 6,2 \pm 0,1$ С, якщо $A = 1,02 \pm 0,01$ В, $\alpha = 0,047 \pm 0,002$ с⁻¹, $\omega = 10,2 \pm 0,1$ с⁻¹. Оцінити значення похибки визначення функції $f(t)$.

1.27. Напруга на обкладинках конденсатора при розряді змінюється за наступним законом:

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $u_0 = 127 \pm 1$ В – початкова напруга, $\tau = 20,31 \pm 0,05$ с – постійна часу. Знайти величину напруги при $t = 16,7 \pm 0,1$ с і похибку її визначення.

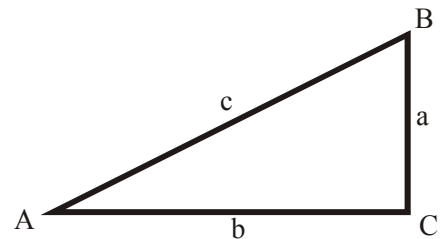
1.28. Для визначення постійної часу розряду конденсатора виміряли напругу на його обкладинках в два моменти часу: $u_0 = 26,3 \pm 0,5$ В при $t = 0$ і $u_1 = 8,4 \pm 0,5$ В при $t = 10,1 \pm 0,1$ с. Обчислити значення постійної часу за формулою

$$\tau = \frac{t}{\ln u_0 - \ln u_1}$$

і оцінити похибку її визначення.

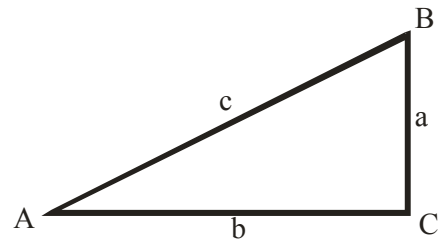
1.29. Обчислити довжину катета a і оцінити похибку її визначення:

$$b = 6,45 \text{ см}, \quad \Delta b = 0,02 \text{ см}, \\ c = 11,2 \text{ см}, \quad \Delta c = 0,1 \text{ см}.$$



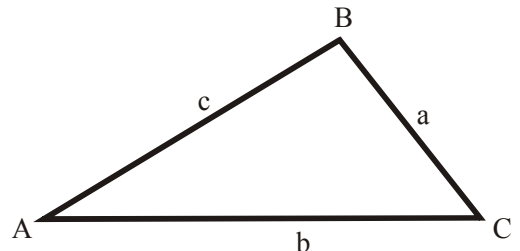
1.30. Обчислити довжину гіпотенузи c і оцінити похибку її визначення:

$$a = 6,2 \text{ см}, \quad \Delta a = 0,1 \text{ см}, \\ b = 7,4 \text{ см}, \quad \Delta b = 0,1 \text{ см}.$$



1.31. Дано:

$$b = 6,45 \text{ см}, \quad \Delta b = 0,01 \text{ см} \\ c = 4,8 \text{ см}, \quad \Delta c = 0,1 \text{ см}, \\ A = 36,1^\circ, \quad \Delta A = 0,1^\circ.$$

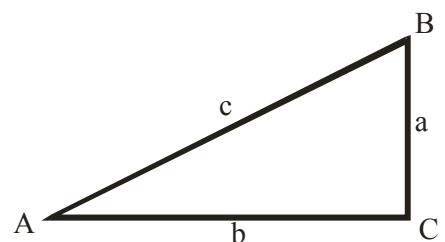


Обчислити за теоремою косинусів довжину сторони a і оцінити похибку:

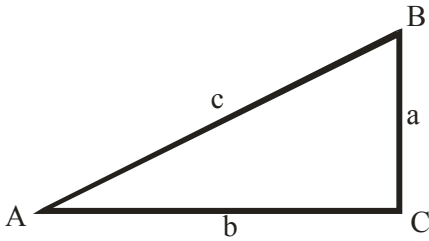
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

1.32. Знайти довжину катета a і оцінити похибку:

$$c = 60,21 \text{ м} \pm 0,05 \text{ м}, \\ A = 22,3^\circ \pm 0,1^\circ.$$



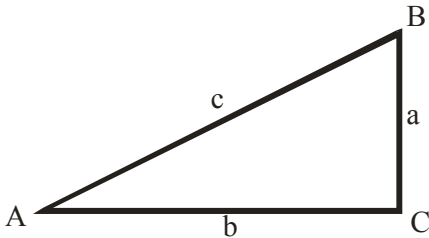
1.33. Знайти довжину катета a і оцінити похибку:



$$b = 6,36 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м},$$

$$A = 32,7^\circ \pm 0,2^\circ.$$

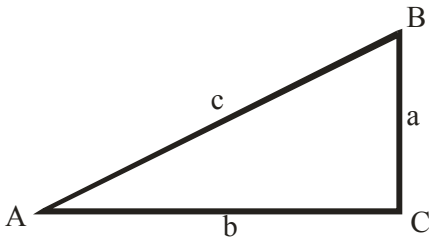
1.34. Знайти довжину гіпотенузи c і оцінити похибку:



$$a = 1,26 \text{ м} \pm 0,02 \text{ м},$$

$$B = 63,4^\circ \pm 0,2^\circ.$$

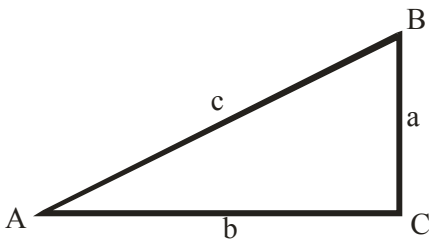
1.35. Обчислити кут A і оцінити похибку його визначення:



$$a = 67,3 \text{ м}, \quad \Delta a = 0,1 \text{ м},$$

$$b = 123,0 \text{ м}, \quad \Delta b = 0,2 \text{ м}.$$

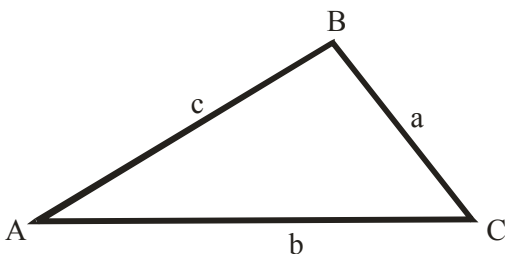
1.36. Обчислити кут A і оцінити похибку його визначення:



$$b = 6,45 \text{ см}, \quad \Delta b = 0,02 \text{ см},$$

$$c = 9,63 \text{ см}, \quad \Delta c = 0,05 \text{ см}.$$

1.37. Знайти довжину сторони a і оцінити похибку. Використати теорему синусів:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$b = 12,35 \text{ см} \pm 0,02 \text{ см},$$

$$A = 36,3^\circ \pm 0,1^\circ,$$

$$B = 45,6^\circ \pm 0,2^\circ.$$

1.38. Обчислити значення функції та визначити абсолютну і відносну похибку результату:

$$y = x^3 \sin x \quad \text{при} \quad x = \sqrt{2} \approx 1,414.$$

1.39. Обчислити значення функції та визначити абсолютну і відносну похибки результату:

$$y = x \ln x \quad \text{при} \quad x = \pi \approx 3,142.$$

1.40. Обчислити значення функції та визначити абсолютну і відносну похибки результату:

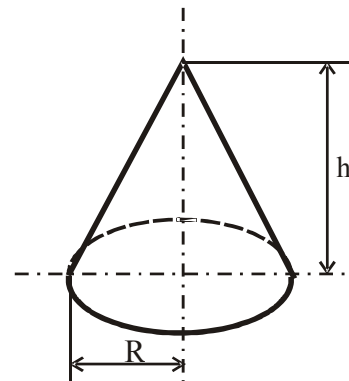
$$y = e^x \cos x \quad \text{при} \quad x = \sqrt{3} \approx 1,732.$$

1.41. Обчислити об'єм конуса і оцінити похибку його визначення:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

$$R = 1,23 \text{ м} \pm 0,02 \text{ м},$$

$$h = 3,6 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м}.$$



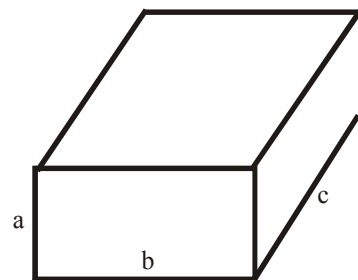
З якою кількістю знаків треба взяти число π , щоб його похибка істотно не впливала на похибку результату?

1.42. Обчислити об'єм прямокутного паралелепіпеда й оцінити абсолютну і відносну похибки результату.

$$a = 2,3 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см},$$

$$b = 3,65 \text{ см} \pm 0,05 \text{ см},$$

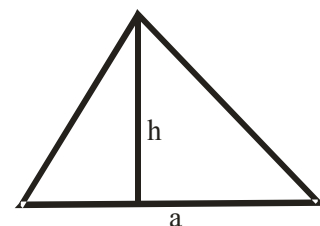
$$c = 5,3 \text{ см} \pm 0,2 \text{ см}.$$

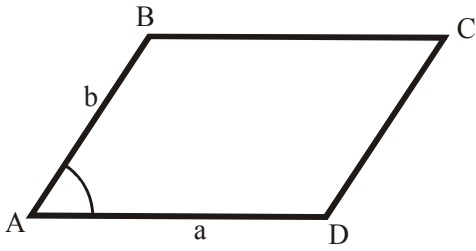


1.43. Обчислити площу трикутника й оцінити похибку результату:

$$a = 16,3 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см},$$

$$h = 10,4 \text{ см} \pm 0,2 \text{ см}.$$



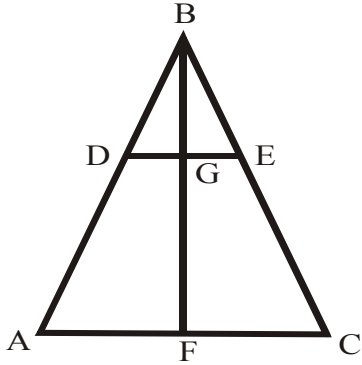


1.44. Обчислити площу паралелограма й оцінити похибку отриманого результату:

$$a = 2,36 \text{ см} \pm 0,02 \text{ см},$$

$$b = 1,45 \text{ см} \pm 0,01 \text{ см},$$

$$A = 63,45^\circ \pm 0,05^\circ.$$



1.45. Знайти довжину висоти BF трикутника ABC і оцінити похибку її визначення, якщо відомо, що

$$AC = 23 \pm 0,5 \text{ м},$$

$$DE = 0,11 \pm 0,01 \text{ м},$$

$$BG = 1,2 \pm 0,1 \text{ м}.$$

1.46. Обчислити значення потужності електричного нагрівача з опором $R = 120 \text{ Ом}$, через який протікає струм $I = 2,23 \text{ А}$. Оцінити похибку результату, якщо $\Delta R = 0,2 \text{ Ом}$, $\Delta I = 0,01 \text{ А}$.

1.47. Знайти відносну похибку визначення об'єму кулі, якщо відносна похибка вимірювання його радіуса дорівнює $0,2 \%$.

ПРАВИЛА ПОСТАНОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Викладені правила стосуються всіх експериментів – від елементарних до найскладніших.

2.1. Загальний план експерименту

1. Скласти блок-схему установки.
2. Скласти перелік необхідних для проведення експерименту приладів. Виходячи з необхідної точності результатів, які планується отримати, визначити клас точності приладів.
3. Зробити оцінку можливої похибки результату.

2.2. Перевірка апаратури перед експериментом

1. Перевірити механічні частини приладів – чи все стійко і правильно виставлено.
2. Перевірити чистоту оптичних поверхонь приладів – скла шкал, лінз, призм тощо.
3. Перевірити правильність електричних з'єднань. Поставити всі перемикачі в початкові положення.
4. Провести контрольні вимірювання, результат яких відомий заздалегідь.

2.3. Проведення експерименту

1. Умови роботи – розташування приладів і ручок управління, освітлення, положення оператора – мають бути зручними.
2. При запису результатів не треба відразу робити обчислення. Слід записувати спостережувані показання та необхідні коефіцієнти (множники).
3. Записи мають бути економними та зрозумілими – такими, щоб автор міг в них розібратися через тривалий термін.
4. Поставити дату проведення експерименту і заголовок. Сформулювати мету експерименту. Накреслити схему вимірювань. Записати склад апаратури з типами приладів та їх номерами.

5. Не переписувати результати вимірювань, тому що:

- втрачається час;
- можливе виникнення помилок;
- майже неможливо уникнути відбору даних.

За потреби переписування слід зберігати початкові дані.

6. Не виправляти цифри в записах, а закреслювати і писати нові.

7. Використовувати рисунки, схеми, ілюстрації разом зі словесними описами.

8. Правильно використовувати десяткові множники в таблицях і на графіках.

$t, \text{с}$	Правильно $t \cdot 10^6 \text{с}$	Неправильно $t \cdot 10^{-6} \text{с}$
$1,2 \cdot 10^{-6}$	1,2	1,2
$3,2 \cdot 10^{-6}$	3,2	3,2
$6,5 \cdot 10^{-6}$	6,5	6,5

9. Намагатися ясно робити записи.

Нехай є такий запис: Помилка нуля амперметра – 0,03 А. Що це означає незрозуміло. Якщо за відсутності струму показання – 0,03 А, то величину 0,03 слід *додавати* до всіх показань приладу. Якщо це поправка, то величину 0,03 слід *віднімати*.

Слід писати: У відсутність струму – показання приладу – 0,03 А.

10. При проведенні записів потрібно весь час контролювати (оцінювати) результати на можливість появи промахів.

11. *Слід знати, що повинно вийти!*

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ ГРАФІКІВ

Графіки будують, щоб визначити деякі величини (наприклад, нахил прямої або відрізок, що відсікається на осі ординат).

Характерні точки кривих (екстремуми, злами, розриви) на графіках видно значно краще, ніж у таблицях.

Графіки використовуються для побудови градуовальник кривих приладів.

3.1. Правила побудови графіків

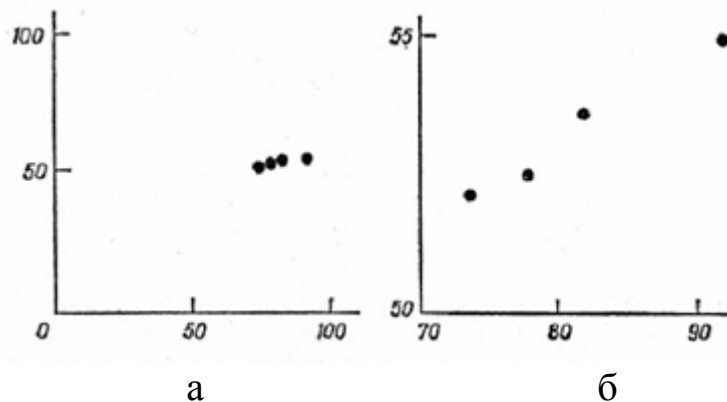
1. Прийнято по горизонтальній осі відкладати незалежну змінну, тобто величину, значення якої задає експериментатор, по вертикальній осі – ту величину, значення якої вимірюється в експерименті.

2. Масштаб осей має забезпечувати зручний розгляд графіка. Експериментальні точки не повинні зливатися разом (рис. 3.1а). Слід вибрати такий масштаб, щоб розташувати точки з оптимальним інтервалом (рис. 3.1б).

3. Масштаб має бути простим. Краще б, якщо 1 см відповідає одиниці вимірюваної величини (або 10, 100, 0,1 од.). Можна вибрати і такий масштаб, щоб 1 см відповідав 2 або 5 одиницям. Інших значень масштабів (в 1 см – 3,7 або 0,15 од. тощо) слід уникати, тому що при нанесенні точок на графік доведеться проводити певні розрахунки.

Не слід прагнути до того, щоб початок координат (0,0) знаходився на графіку.

Масштаби по обох осях вибираються незалежно один від одного.



**Рис. 3.1. Вибір масштабу графіка:
а – невдалий, б – вдалий**

Якщо одна або обидві величини, що наносяться на графік, змінюються у великому інтервалі значень, використовується логарифмічний масштаб по одній або обох осях (рис. 3.2).

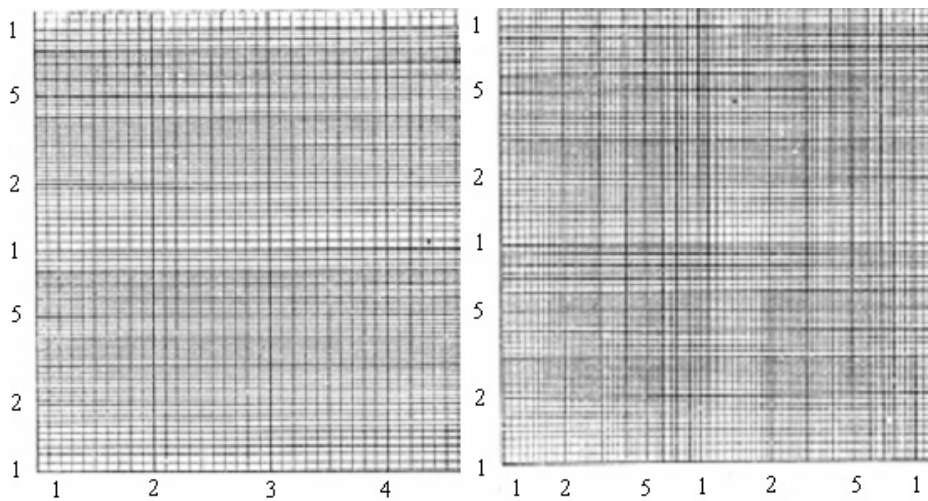


Рис. 3.2. Приклади логарифмічних масштабів

4. Стрілки, що задають додатний напрям осей, не ставлять, якщо обрано стандартний напрямок осей: зліва направо і знизу вгору. Осі підписують: вісь абсцис – праворуч внизу, вісь ординат – ліворуч вгорі. Проти кожної осі вказують назву або символ величини, що відкладається по осі, а через кому – одиниці її вимірювання. Масштабні риски проставляють по осях на однаковій відстані одну від другої (крім графіків у логарифмічному масштабі), щоб вони виходили на поле графіка. По осі абсцис цифри масштабу пишуть під рисками, по осі ординат – ліворуч від рисок. Десятковий множник ставиться за правилами, описаними у розділі 2.

5. Коли на графіку для порівняння з експериментальними даними проводять теоретичну криву, то точки, через які її проводять, обирають на свій розсуд. На проведеної кривій вони мають бути непомітними.

Експериментальні дані слід позначати жирними точками, що добре виділяються (рис. 3.3). Іноді корисно через експериментальні точки провести «найкращу» плавну криву (термін «найкраща крива» буде пояснений в цьому розділі нижче). При з'єднанні експериментальних точок ламаною лінією (рис. 3.4а) начебто вказується, що співвідношення між двома величинами носить стрибкоподібний характер, а це мало ймовірно. Найімовірніше, що дане співвідношення описується плавною кривою (рис. 3.4б).

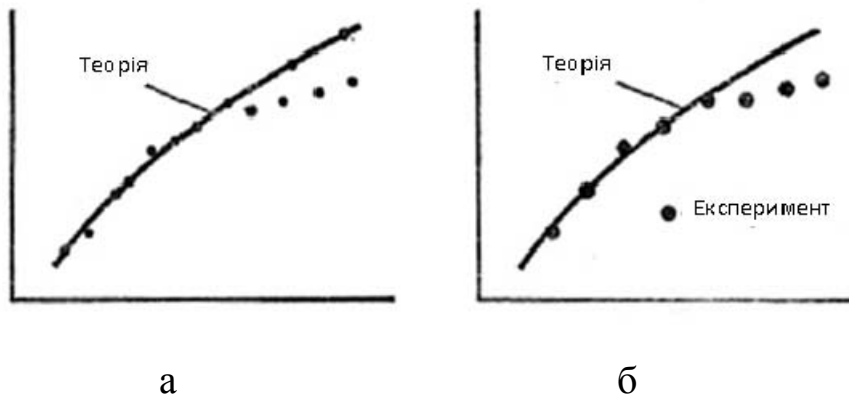


Рис. 3.3. Теоретичні та експериментальні дані на графіку
а – невдалий графік, б – вдалий графік

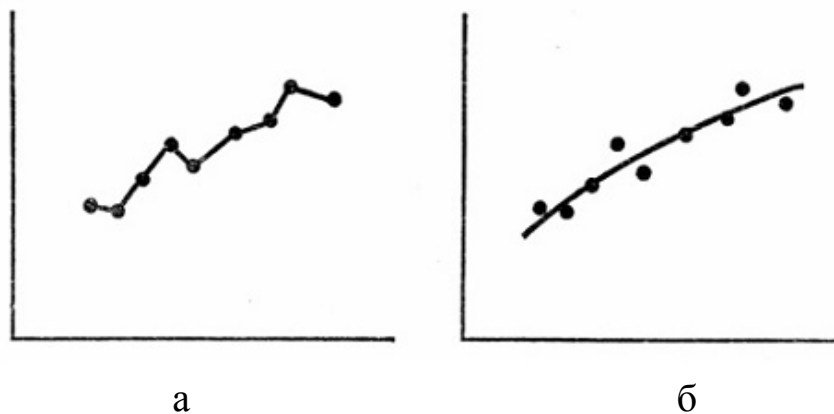


Рис. 3.4. Проведення лінії через експериментальні точки
а – неправильно, б – правильно

Якщо на графіку є теоретична крива, то «плавну» криву через експериментальні точки краще не проводити. Вона може заважати порівнянню експерименту з теорією.

6. Щоб розрізнити експериментальні дані, що належать до різних умов або до різних об'єктів, можна користуватися різними значками – кружечками, хрестиками або точками різного кольору.

7. Похибка експериментального значення вказується «вусами»:



Це слід робити, якщо інформація про похибки є необхідною – «вуси» визначають значимість відхилення експериментальних даних від теоретичної кривої. Так, на рис. 3.5а відхилення результатів від теорії не слід вважати значимим, а на рис. 3.5б воно є значимим.

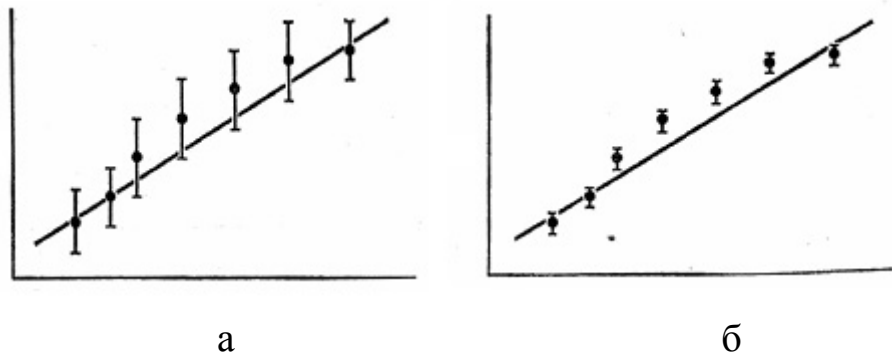


Рис. 3.5. Відхилення експериментальних точок від теоретичної кривої а – незначиме, б – значиме

8. При побудові графіка слід вибирати найбільш показову залежність. Припустимо, що було проведено експеримент, метою якого є перевірка справедливості співвідношення $y = x$. Графік залежності y від x (рис. 3.6а) показує, що дана рівність приблизно виконується. Але краще побудувати залежність різниці $y - x$ від x . Ця різниця є малою порівняно з величиною, і треба вибрати більший масштаб (рис. 3.6б). На першому з графіків відхилення від рівності y та x малопомітними, на другому вони добре помітні.

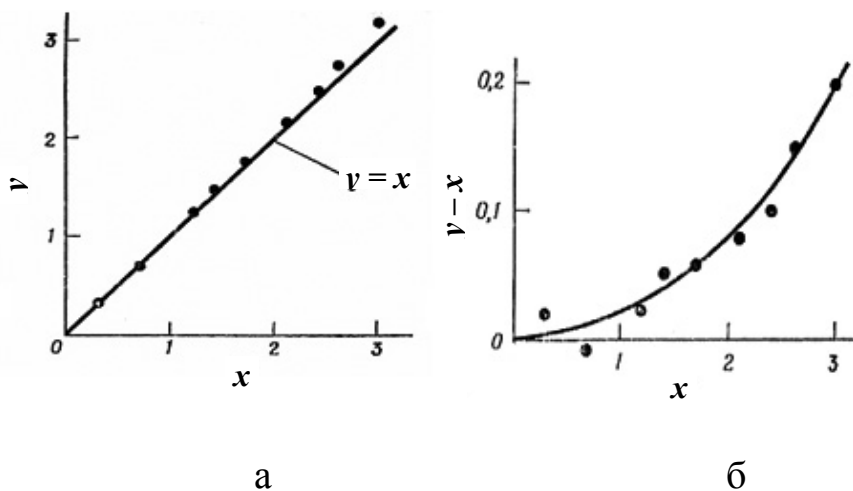


Рис. 3.6. Вибір підходящої функціональної залежності: а – залежність y від x , б – залежність $y - x$ від x

3.2. Метод найменших квадратів

При аналізі даних може виникнути необхідність опису експериментальної залежності аналітичним виразом. Для цього часто використовується метод найменших квадратів (МНК) [6-9]. Його сутність полягає в наступному.

Нехай є експериментальні дані, що описують залежність величини Y від величини X .

n	X_n	Y_n
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
...
N	X_N	Y_N

Вона показана на рис. 3.7 точками.

Необхідно знайти функцію $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, x)$, яка описує найкращим чином цю залежність з урахуванням розкиду точок, спричиненого похибками вимірювання величини Y .

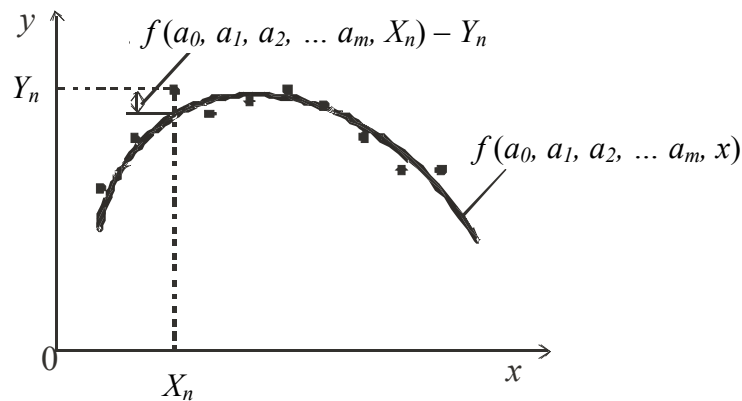


Рис. 3.7. До опису методу найменших квадратів

Примітка. Координати експериментальних точок будемо позначати великими літерами (X, Y). Змінні, які входять до апроксимуючої формули, будемо позначати малими буквами (x, y).

Найкращою функцією вважається така, для якої сума

$$S = \sum_{n=1}^N [f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, X_n) - Y_n]^2 \tag{3.1}$$

приймає мінімально можливе значення. З рис. 3.7 видно, що вираз у квадратних дужках – це відстань від апроксимуючої кривої до експериментальної точки з тією ж абсцисою. Таким чином, найкращою кривою є така, для якої сума квадратів відстаней від неї до експериментальних точок є мінімальною. Мінімізація виразу (3.7) досягається вибором параметрів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Вид апроксимуючої функції має бути задано, наприклад, у вигляді однієї з наведених нижче функцій:

$$\begin{aligned} f(a_0, a_1, x) &= a_0 + a_1x, \\ f(a_0, a_0, a_2, \dots, a_m, x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_mx^m, \\ f(a_0, a_1, x) &= a_0e^{a_1x}, \\ f(a_0, x) &= \frac{a_0}{x}. \end{aligned}$$

Він визначається характером експериментальної залежності.

3.2.1. Лінійна залежність МНК

Лінійна функціональна залежність є найпростішою, але вона дуже часто зустрічається.

Функція (3.1), що мінімізується, для неї виглядає так:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{n=1}^N [(a_0 + a_1 X_n) - Y_n]^2. \quad (3.2)$$

Умовами мінімуму функції $S(a_0, a_1)$ є рівність нулю її часткових похідних

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0.$$

Використавши ці умови стосовно до функції (3.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= \sum_{n=1}^N 2(a_0 + a_1 X_n - Y_n) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= \sum_{n=1}^N 2(a_0 + a_1 X_n - Y_n) X_n = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Розкривши дужки в цих виразах і залишивши в лівій частині рівностей доданки, що містять величини a_0 і a_1 , отримаємо:

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{n=1}^N X_n &= \sum_{n=1}^N Y_n, \\ a_0 \sum_{n=1}^N X_n + a_1 \sum_{n=1}^N X_n^2 &= \sum_{n=1}^N X_n Y_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

З цієї системи рівнянь знаходяться параметри прямої a_0 і a_1 .

Приклад 3.1

Досліджувалася залежність величини Y від X . Отримано наступний ряд значень.

X	2	3	3,5	5	5,5	6	7	7,7
Y	5	10	20	25	35	40	40	51

Передбачається, що ця залежність є лінійною: $y = a_0 + a_1 x$.

Необхідно за допомогою методу найменших квадратів знайти значення параметрів a_0 і a_1 і провести пряму через експериментальні точки.

Для обчислення сум, що входять в систему рівнянь (3.3), доцільно скласти наступну таблицю.

n	X_n	Y_n	X_n^2	$X_n Y_n$
1	2	5	4	10
2	3	10	9	30
3	3,5	20	12,25	70
4	5	25	25	125
5	5,5	35	30,25	192,5
6	6	40	36	240
7	7	40	49	280
$N = 8$	7,7	51	59,29	392,7
\sum	39,7	226	224,79	1340,2

Підстановка в (3.3) одержаних сум дає:

$$8a_0 + 39,7a_1 = 226,$$

$$39,7a_0 + 224,79a_1 = 1340,2.$$

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$a_0 = -10,8, \quad a_1 = 7,87.$$

На рис. 3.8 показано графік прямої $f(x) = 7,87x - 10,8$, що проходить через масив експериментальних точок.

Приклад 3.2

Чисельність експлуатованої популяції тварин, що експлуатуються інтенсивно, можна оцінити за допомогою методу де Лурі. Будується графік, в якому по осі ординат відкладається видобуток, який припадає на одиницю знарядь лову за одиницю часу, по осі абсцис – кількість тварин, виловлених

з моменту початку обліку. Графік екстраполюється до перетину з віссю абсцис (популяція повністю знищена). Координата точки перетину дає загальну чисельність популяції в момент початку обліку.

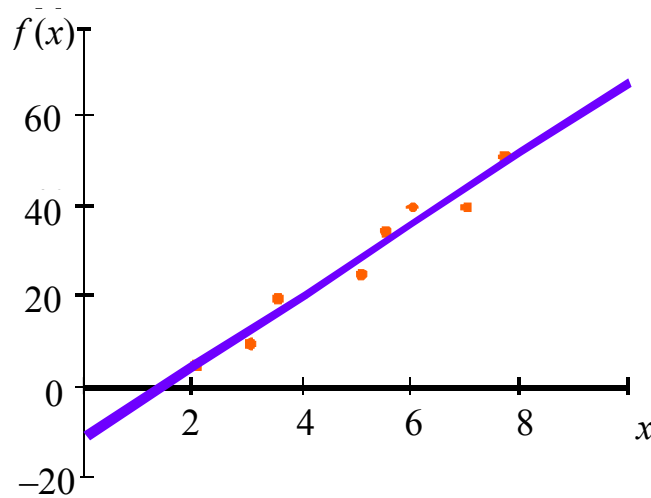


Рис. 3.8. Апроксимація лінійної залежності за допомогою методу найменших квадратів

Нижче в таблиці наведено цифри, що характеризують кількість китів, що добуваються в середньому китобійним судном за добу на одному з промислів, і загальну кількість китів, здобутих на цьому промислі, починаючи з 1957 року.

Роки	Видобуток на китобійне судно за добу	Загальний видобуток
1957	2,3	0
1958	2,0	5900
1959	1,8	9800
1960	1,6	14000
1961	1,3	19300
1962	1,1	23000
1963	0,9	27000
1964	0,8	29400

Оцінити чисельність китів на цьому промислі в 1957 році. Підстановка даних з таблиці в суми системи рівнянь (3.3) дає:

$$\begin{aligned} 8a_0 + 1,284 \cdot 10^5 a_1 &= 11,8, \\ 1,284 \cdot 10^5 a_0 + 2,822 \cdot 10^9 a_1 &= 1,5 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

З її розв'язку випливає:

$$a_0 = 2,305, \quad a_1 = -5,17 \cdot 10^{-5}.$$

На рис. 3.9 показано графік, побудований за даними, наведеними в таблиці, і пряма, що апроксимує ці дані.

Точка перетину прямої $f(x) = a_0 + a_1 x$ з віссю абсцис є коренем рівняння $a_0 + a_1 x = 0$. Отже, популяція китів в 1957 році налічувала

$$x_0 = -\frac{a_0}{a_1} = 44578 \text{ особин.}$$

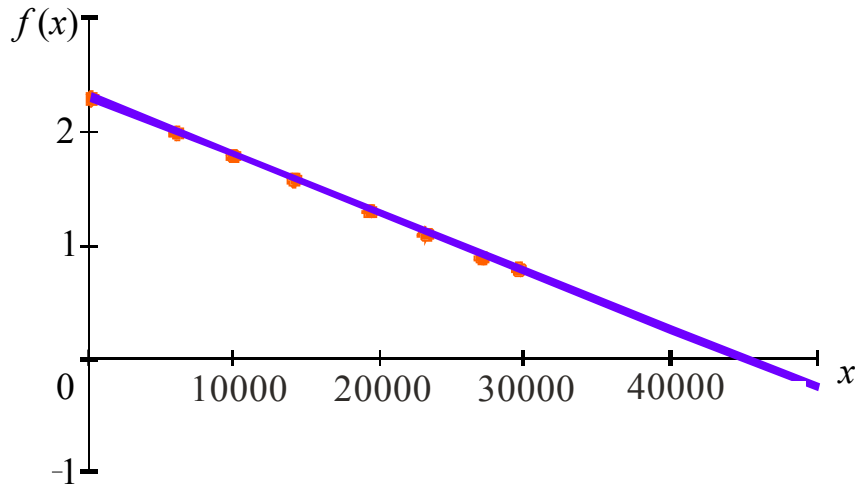


Рис. 3.9. Метод де Лурі визначення початкової чисельності популяції тварин

3.2.2. Похибки визначення параметрів лінійної залежності МНК

Часто при використанні методу найменших квадратів необхідно не тільки знайти значення параметрів апроксимуючої функції, але також оцінити похибку їх визначення. Математична статистика дає наступні формули для похибок визначення параметрів a_0 і a_1 прямої, проведеної за допомогою методу найменших квадратів:

$$\Delta a_0 = t(P, N - 1) S \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N X_n^2}{N \sum_{n=1}^N (X_n - X_{\text{сеп}})^2}}, \tag{3.4}$$

$$\Delta a_1 = t(P, N - 1) S \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (X_n - X_{\text{сеп}})^2}}. \tag{3.5}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N [Y_n - (a_0 + a_1 X_n)]^2}{N - 2}}. \tag{3.6}$$

У цих формулах t – коефіцієнт Стьюдента, P – довірна ймовірність, N – кількість вимірювань, $X_{сер}$ – середнє арифметичне значення величин X_n .

Приклад 3.3

Оцінити похибку визначення початкової чисельності популяції китів у прикладі 3.2.

Відповідно до формули (1.7) похибка величини x_0 дорівнює

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_1}{a_1}\right)^2}. \quad (3.7)$$

Застосування формул (3.4) і (3.5) до даних прикладу 3.2 дає

$$a_0 = 0,021, \quad \Delta a_1 = 1,41 \cdot 10^{-6}.$$

Відносні помилки будуть такими:

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = 0,009, \quad \frac{\Delta a_1}{a_1} = -0,022.$$

Обчислена за формулою (3.7) відносна похибка результату дорівнює 0,024, так що:

$$\Delta x_0 = 1067.$$

З урахуванням правил округлення значень похибки та результату можна записати:

$$x_0 = 45000 \pm 1000.$$

Приклад 3.4

В одному з районів Арктики проводилися дослідження, метою яких було встановити – чи є зв'язок між умовами зими і масою шкурки песця, що проживає в цьому районі. Було отримано наступні дані:

Середня температура найхолоднішого місяця, °С	–20	–21,4	–26,6	–28,7	–30,2	–35,0
Маса шкурки песця, г	255	279	263	271	298	262

Чи можна на підставі цих даних стверджувати, що в суворі зими маса шкурки песця більше, ніж у теплі зими?

На графіку рис. 3.10 нанесені точки, відповідні даним таблиці, і через них за допомогою методу найменших квадратів проведена пряма. Кутовий коефіцієнт прямої $a_1 = -0,538$ г / град. Знак його вказує на те, що маса шкурки збільшується з пониженням температури, тобто на поставлене в задачі питання можлива позитивна відповідь. Але розкид точок на графіку дуже великий, так що похибка визначення параметрів апроксимуючої прямої теж є великою.

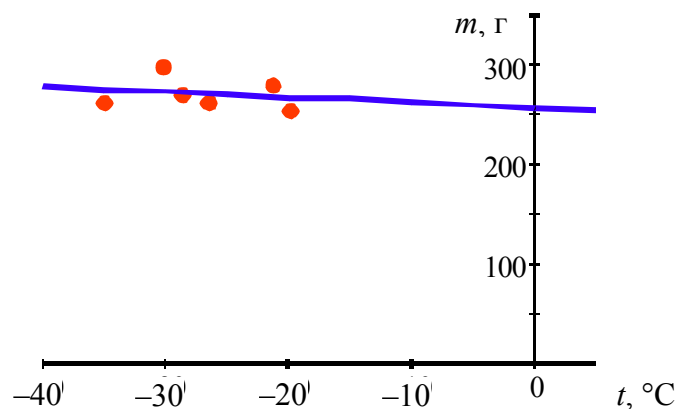


Рис. 3.10. Залежність маси шкурки песця від температури

Використання формули (3.5) дає наступне значення похибки визначення кутового коефіцієнта (при довірчій ймовірності 0,95):

$$\Delta a_1 = 3,746.$$

Це означає, що значення параметра лежить в інтервалі від $-4,284$ до $+3,208$, тобто його знак може бути як негативним, так і позитивним. Отже, можна говорити про певну залежність маси шкурки песця від характеру зими. З'ясуємо, з якою ймовірністю можна говорити про таку залежність. Повторивши розрахунки за формулою (3.5) для різних значень довірчої ймовірності, можна побачити що при $P = 0,28$ і менше довірчий інтервал стає настільки вузьким, що коефіцієнт a_1 залишається від'ємним в усьому цьому інтервалі. Це означає, що з імовірністю 28 % можна стверджувати, що при зниженні температури маса шкурки песця зростає. Звичайно, така ймовірність є занадто малою, щоб робити якісь певні висновки. Для більшої визначеності треба мати більше статистичних даних.

3.2.3. Лінеаризація залежності МНК

У багатьох випадках залежності між фізичними величинами, вимірними в експерименті є нелінійними. Тому для їх обробки не можна застосувати метод, викладений у п. 3.2.1. Але якщо закон зміни фізичної величини описується формулою з двома параметрами

$$y = f(p, q, x), \quad (3.8)$$

то шляхом відповідної заміни змінних цю формулу можна привести до вигляду лінійної залежності:

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (3.9)$$

де a_0 і a_1 пов'язані з p і q певними функціональними залежностями.

Параметри a_0 і a_1 формули (3.9) можна знайти за допомогою наведених вище формул, а потім обчислити параметри p і q рівняння (3.8).

Приклад 3.5

У таблиці наведено результати експерименту з вимірювання процесу охолодження нагрітого тіла.

t , хв	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T , °С	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Залежність $T(t)$ показана на рис. 3.11 великими точками.

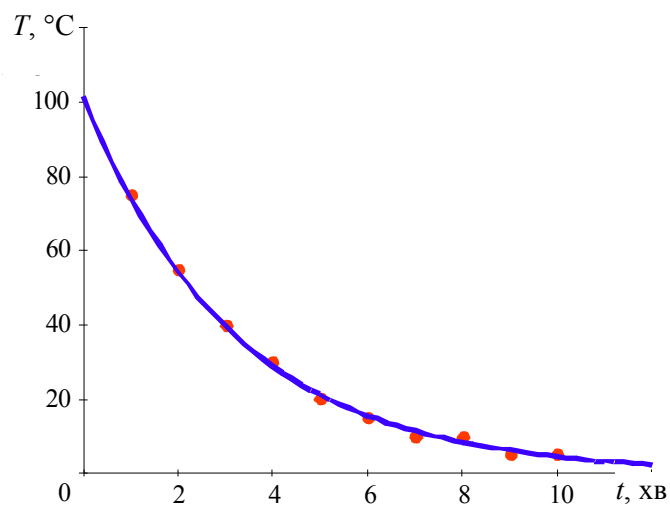


Рис. 3.11. Хід охолодження нагрітого тіла

Закон охолодження нагрітого тіла добре описується формулою

$$T = T_0 e^{\frac{-t}{\tau}}, \quad (3.10)$$

де T_0 – початкова температура, τ – теплова стала часу.

Лінеаризуємо залежність (3.10). Для цього прологарифмуємо її:

$$\ln T = \ln T_0 - \frac{1}{\tau} t.$$

Залежність величини $\ln T$ від часу є лінійною. Вона показана квадратами на рис. 3.12.

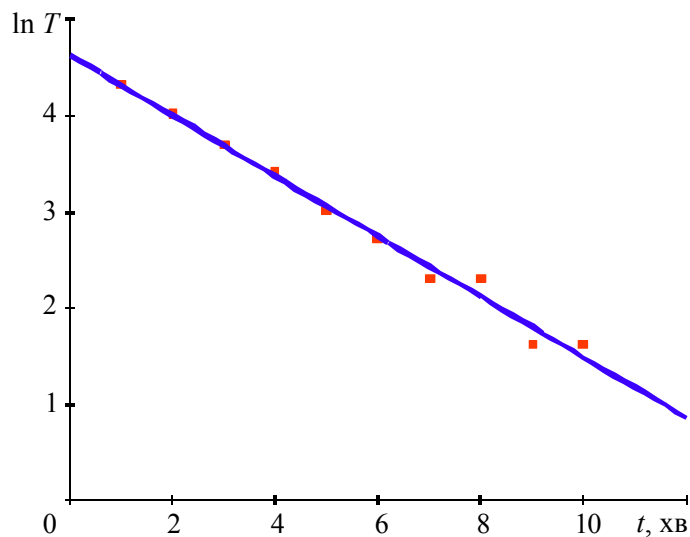


Рис. 3.12. Лінеаризована залежність ходу охолодження нагрітого тіла

За допомогою формул розділу 3.2.1 тепер можна знайти параметри цієї лінійної залежності:

$$a_0 = \ln T_0 = 4,617, \quad a_1 = -\frac{1}{\tau} = -0,313 c^{-1}.$$

На рис. 3.12 ця залежність показана суцільною лінією.

З цих співвідношень знайдемо параметри формули (3.10):

$$T_0 = e^{a_0} = 101 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad \tau = -\frac{1}{a_1} = 3,20 \text{ с.}$$

Залежність, яка описується цією формулою, показана на рис. 3.11 суцільною лінією.

Приклад 3.6

Визначалася залежність об'єму газу V від тиску P при постійній температурі.

P , атм	1,00	0,89	0,81	0,73	0,60	0,48	0,42	0,32
V , л	1,41	1,58	1,69	1,88	2,18	2,68	3,04	4,01

Передбачається, що виконується закон Бойля–Маріотта $PV = const$. Необхідно визначити значення сталої A в рівнянні

$$P = \frac{A}{V}. \quad (3.11)$$

На рис. 3.13 точками показано лінеаризовану залежність, де по осі абсцис відкладена величина $1/V$, а по осі ординат – тиск P .

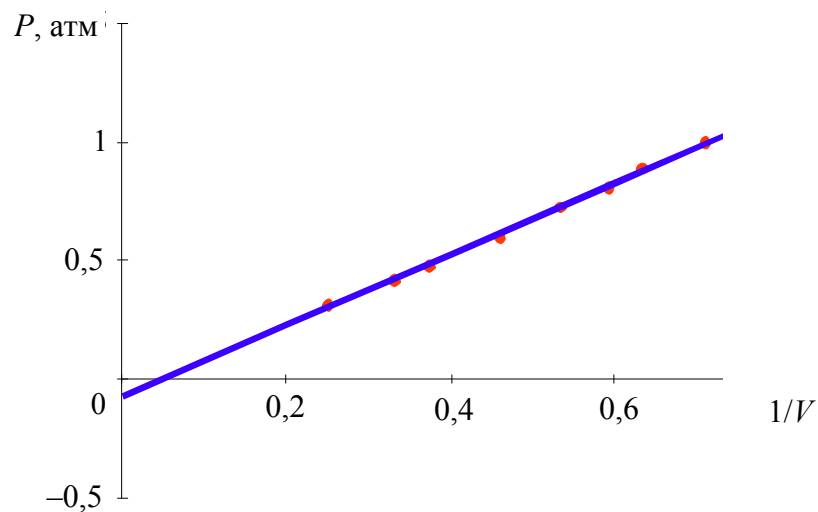


Рис. 3.13. Лінеаризована залежність тиску газу від його об'єму

За допомогою співвідношень розділу 3.2.1 можна знайти параметри прямої лінії:

$$a_0 = -0,072, \quad a_1 = A = 1,503.$$

Звідси випливає, що залежність тиску газу від об'єму виражається наступною формулою:

$$P = \frac{1,503}{V} - 0,072. \quad (3.12)$$

Наявність постійної добавки у виразі (3.12) свідчить або про відступ від закону Бойля–Маріотта в умовах проведення експерименту або про наявність систематичної похибки в результатах.

Нижче наведено деякі апроксимуючі функції, які часто використовуються при лінеаризації експериментальних залежностей. У першій колонці таблиці наведено приклади функцій, у другій – рівняння лінеаризованих залежностей.

По осі абсцис відкладаються величини, що містять змінну x ($x, \ln x, 1/x$), по осі ординат – величини, що стоять в лівій частині рівняння – ($y, \ln y, 1/y$).

У третій колонці наведено співвідношення, які зв'язують параметри лінійної функції з параметрами вихідного рівняння.

У четвертій колонці надано перетворення, за допомогою яких можна знайти параметри p і q вихідної функції.

Апроксимуюча Функція	Лінеаризована залежність	Параметри лінійної залежності	Зворотні перетворення
$y = pe^{qx}$	$\ln y = \ln p + qx$	$a_0 = \ln p, a_1 = q$	$p = e^{a_0}, q = a_1$
$y = pq^x$	$\ln y = \ln p + \ln qx$	$a_0 = \ln p, a_1 = \ln q$	$p = e^{a_0}, q = e^{a_1}$
$y = px^q$	$\ln y = \ln p + q \ln x$	$a_0 = \ln p, a_1 = q$	$p = e^{a_0}, q = a_1$
$y = p + q/x$	$y = p + q/x$	$a_0 = p, a_1 = q$	$p = a_0, q = a_1$
$y = 1/(p + qx)$	$1/y = p + qx$	$a_0 = p, a_1 = q$	$p = a_0, q = a_1$

У деяких випадках закон, за яким змінюється вимірювана в експерименті величина, невідомий. Тоді можна спробувати кілька різних аналітичних залежностей і вибрати ту, яка найкраще описує експериментальну залежність. Критерієм тут служить значення суми (3.1), яке має бути найменшим.

Приклад 3.7

У таблиці наведено експериментальні дані про залежність певної величини Y від величини X .

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0,182	0,141	0,083	0,085	0,040	0,038	0,030	0,022	0,032	0,025

Експериментальна залежність $Y(X)$ показана на рис. 3.14 точками.

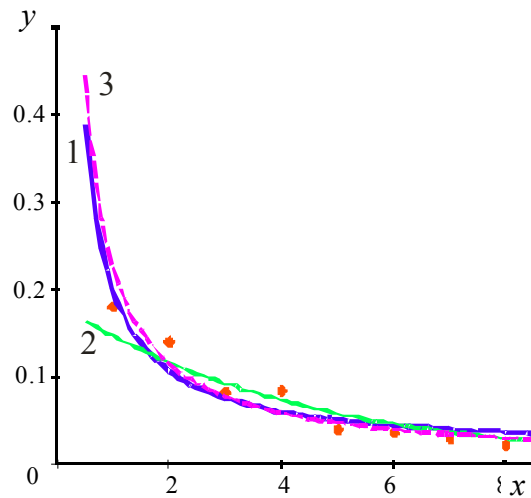


Рис. 3.14. Різні види апроксимації експериментальної залежності:

$$1 - y = a + \frac{b}{x}, \quad 2 - y = a e^{-bx}, \quad 3 - y = a x^{-b}.$$

Перевіримо можливість апроксимації цієї залежності такими формулами:

$$y_1 = p_1 + q_1 / x, \quad (3.13)$$

$$y_2 = p_2 e^{-q_2 x}, \quad (3.14)$$

$$y_3 = p_3 x^{-q_3}. \quad (3.15)$$

Лінеаризація функцій (3.13)–(3.15) дає наступні залежності:

$$y_1 = p_1 + q_1 / x,$$

$$\ln y_2 = \ln p_2 - q_2 x,$$

$$\ln y_3 = \ln p_3 - q_3 \ln x.$$

Залежності $y = f(1/x)$, $\ln y = f(x)$, $\ln y = f(\ln x)$ – це прями лінії. Використовуючи співвідношення розділу 3.2.1 і відповідні зворотні перетворення таблиці, отримаємо:

$$p_1 = 0,013, \quad q_1 = 0,188,$$

$$p_2 = 0,185, \quad q_2 = 0,231,$$

$$p_3 = 0,227, \quad q_3 = 0,976.$$

Це дає наступні аналітичні залежності:

$$y_1 = 0,188 / x + 0,013, \quad (3.16)$$

$$y_2 = 0,185 e^{-0,231x}, \quad (3.17)$$

$$y_3 = 0,227 / x^{0,976}. \quad (3.18)$$

Вони показані на рис. 3.14 суцільними та штриховими лініями. Значення суми (3.1) для цих функцій виходять такими:

$$S_1 = 2,705 \cdot 10^{-3}, \quad S_2 = 2,676 \cdot 10^{-3}, \quad S_3 = 3,564 \cdot 10^{-3}.$$

Суми S_1 і S_2 відрізняються одна від одної дуже мало, сума S_3 – дещо більше від перших двох, але не набагато. З формул (3.16)–(3.18) видно, що досліджувана залежність є близькою до функції $y \approx 0,2 / x$, хоча може досить добре описуватися експонентою $y \approx 0,2 e^{-0,2x}$.

3.2.4. Поліноміальна залежність МНК

Метод лінеаризації, викладений у п. 3.2.3, дає добрі результати, якщо закон зміни вимірюваної фізичної величини є відомим. Причому формула, що описує цей закон, має містити не більше двох параметрів. В інших випадках можна використовувати метод найменших квадратів, застосовуючи його до апроксимуючої функції у вигляді полінома:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (3.19)$$

Ступінь полінома має бути менше від кількості експериментальних точок N . При цьому апроксимуюча залежність буде згладжувати їх розкид, спричинений похибками вимірювань. В іншому випадку (при $m = N$) апроксимуюча крива пройде через усі експериментальні точки на графіку.

Функція, що мінімізується, виглядає так:

$$S = \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1X_n + a_2X_n^2 + \dots + a_mX_n^m - Y_n)^2. \quad (3.20)$$

Умовами її мінімуму є:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial S}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0..$$

Диференціювання виразу (3.20) дає:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 2 \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \dots + a_m X_n^m - Y_n) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 2 \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \dots + a_m X_n^m - Y_n) X_n = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 2 \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \dots + a_m X_n^m - Y_n) X_n^2 = 0, \\ &\text{-----} \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} &= 2 \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \dots + a_m X_n^m - Y_n) X_n^m = 0, \end{aligned}$$

Звідси після деяких перетворень виходить наступна система рівнянь:

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{n=1}^N X_n + a_2 \sum_{n=1}^N X_n^2 + \dots + a_m \sum_{n=1}^N X_n^m &= \sum_{n=1}^N Y_n, \\ a_0 \sum_{n=1}^N X_n + a_1 \sum_{n=1}^N X_n^2 + a_2 \sum_{n=1}^N X_n^3 + \dots + a_m \sum_{n=1}^N X_n^{m+1} &= \sum_{n=1}^N X_n Y_n, \\ a_0 \sum_{n=1}^N X_n^2 + a_1 \sum_{n=1}^N X_n^3 + a_2 \sum_{n=1}^N X_n^4 + \dots + a_m \sum_{n=1}^N X_n^{m+2} &= \sum_{n=1}^N X_n^2 Y_n. \\ &\text{-----} \\ a_0 \sum_{n=1}^N X_n^m + a_1 \sum_{n=1}^N X_n^{m+1} + a_2 \sum_{n=1}^N X_n^{m+2} + \dots + a_m \sum_{n=1}^N X_n^{2m} &= \sum_{n=1}^N X_n^m Y_n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для автоматизації обчислень з допомогою ЕОМ зручно записати ліву частину системи рівнянь (3.21) у вигляді матриці з елементами

$$B_{kl} = \sum_{n=1}^N X_n^{k+l},$$

а праву частину – у вигляді вектора

$$R_k = \sum_{n=1}^N X_n^k Y_n,$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $l = 0, 1, 2, \dots, m$.

З курсу лінійної алгебри відомо, що розв'язання системи рівнянь (3.21) можна знайти в наступному вигляді:

$$A = B^{-1} \cdot R, \quad (3.22)$$

де A – вектор $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Приклад 3.8

Знайти параметри формули $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ за результатами вимірювань:

X_n	-2,6	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1
Y_n	2,5	3,8	5	4,1	0,6	-4,6

Система рівнянь (3.21) для даного випадку виглядає так:

$$\begin{aligned} 6a_0 + a_1 \sum_{n=1}^6 X_n + a_2 \sum_{n=1}^6 X_n^2 &= \sum_{n=1}^6 Y_n, \\ a_0 \sum_{n=1}^6 X_n + a_1 \sum_{n=1}^6 X_n^2 + a_2 \sum_{n=1}^6 X_n^3 &= \sum_{n=1}^6 X_n Y_n, \\ a_0 \sum_{n=1}^6 X_n^2 + a_1 \sum_{n=1}^6 X_n^3 + a_2 \sum_{n=1}^6 X_n^4 &= \sum_{n=1}^6 X_n^2 Y_n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для обчислення сум, що входять сюди, складемо таку таблицю.

N	X_n	Y_n	X_n^2	X_n^3	X_n^4	$X_n Y_n$	$X_n^2 Y_n$
1	-2,6	2,5	6,76	-17,576	45,6976	-6,5	16,900
2	-2,1	3,8	4,41	-9,261	19,4481	-7,98	16,758
3	-1,1	5	1,21	-1,331	1,4661	-5,5	6,050
4	0	4,1	0	0	0	0	0
5	1,1	0,6	1,21	1,331	1,4661	0,66	0,726
6	2,1	-4,6	4,41	9,261	19,4481	-9,66	-20,286
Σ	-2,6	11,4	18,00	-17,576	87,5260	-28,98	20,148

Підстановка сум з цієї таблиці в (3.23) дає:

$$\begin{aligned} 6a_0 - 2,6a_1 + 18a_2 &= 11,4, \\ -2,6a_0 + 18a_1 - 17,576a_2 &= -28,98, \\ 18a_0 - 17,576a_1 + 87,526a_2 &= 20,148. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$a_0 = 4,043, \quad a_1 = -2,007, \quad a_2 = -1,004.$$

Отже,

$$f(x) = -1,004x^2 - 2,007x + 4,043..$$

Графік залежності $Y(X)$ з нанесеними на ньому експериментальними точками і апроксимуючої кривої $f(x)$ показано на рис. 3.15.

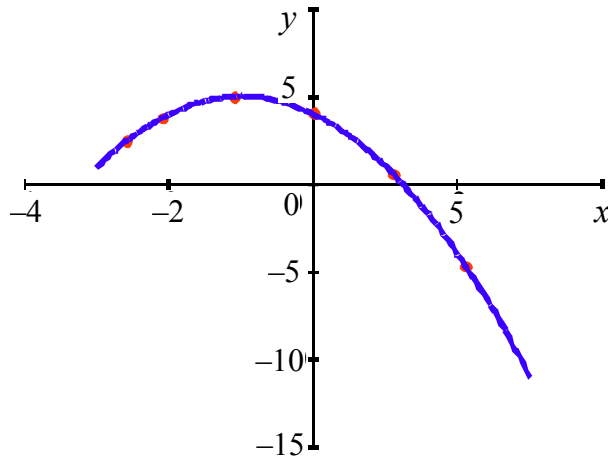


Рис. 3.15. Поліноміальна апроксимація МНК

При використанні поліноміальної апроксимації виникає запитання про оптимальне значення ступеня полінома m . При малих m відбувається сильне згладжування залежності і може бути втрачена інформація про деякі її екстремуми. При великих m згладжування може виявитися недостатнім. Наприклад, при $m = N$ (N – число точок на графіку) апроксимуюча крива пройде через усі точки і вплив випадкових похибок не буде усунуто.

Вибір оптимального значення m здійснюється шляхом аналізу поведінки залишкових дисперсій в міру збільшення ступеня полінома:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (a_0 - Y_n)^2,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n - Y_n)^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 - Y_n)^2. \tag{3.25}$$

$$S_k^2 = \frac{1}{N-(k+1)} \sum_{n=1}^N (a_0 + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \dots + a_k X_n^k - Y_n)^2.$$

Ступінь полінома можна підвищувати доти, поки зменшення залишкової дисперсії значиме. Для цього використовується критерій Фішера:

$$\frac{S_k^2}{S_{k+1}^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k, N-k-1). \tag{3.26}$$

Значення коефіцієнтів Фішера $F_\alpha(f_1, f_2)$ при обраному рівні значущості $\alpha = 1 - P$ (P – довірна ймовірність) і кількості ступенів свободи f_1 і f_2 наведені в таблиці.

Квантилі розподілу Фішера $F_P(k_1, k_2)$
 $P = 0,9$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,90	59,43	59,85	60,19	62,26	63,06
2	8,52	9,00	9,16	9,24	9,29	9,32	9,34	9,36	9,38	9,39	9,45	9,48
3	5,53	5,46	5,39	5,34	5,30	5,28	5,26	5,257	5,24	5,23	5,16	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,10	4,05	4,00	3,97	3,95	3,93	3,91	3,81	3,777
5	4,06	3,77	3,61	3,52	3,45	3,40	3,36	3,33	3,31	3,29	3,17	3,12
6	3,77	3,46	3,28	3,18	3,10	3,05	3,01	2,98	2,95	2,93	2,79	2,74
7	3,58	3,25	3,07	2,96	2,88	2,82	2,78	2,75	2,72	2,70	2,55	2,49
8	3,45	3,11	2,92	2,80	2,72	2,66	2,62	2,58	2,56	2,53	2,38	2,31
9	3,36	3,00	2,81	2,69	2,61	2,55	2,50	2,46	2,44	2,41	2,25	2,18
10	3,28	2,92	2,72	2,60	2,52	2,46	2,41	2,37	2,34	2,32	2,15	2,08
11	3,22	2,85	2,66	2,53	2,45	2,38	2,34	2,30	2,27	2,24	2,07	1,99
12	3,17	2,80	2,60	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,18	2,01	1,93
13	3,13	2,76	2,56	2,43	2,34	2,28	2,23	2,19	2,16	2,13	1,95	1,87
14	3,10	2,72	2,52	2,39	2,30	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	1,91	1,82
15	3,07	2,69	2,48	2,36	2,27	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	1,87	1,78
16	3,04	2,66	2,46	2,33	2,24	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,83	1,75
17	3,02	2,64	2,43	2,30	2,21	2,15	2,10	2,06	2,02	2,00	1,80	1,71
18	3,00	2,62	2,41	2,28	2,19	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,78	1,69
19	2,98	2,60	2,39	2,26	2,17	2,10	2,05	2,01	1,98	1,95	1,75	1,66
20	2,97	2,58	2,38	2,24	2,15	2,09	2,03	1,99	1,96	1,93	1,73	1,64
25	2,91	2,52	2,31	2,18	2,09	2,02	1,97	1,92	1,89	1,86	1,65	1,55
120	2,74	2,34	2,12	1,99	1,89	1,82	1,76	1,72	1,68	1,65	1,40	1,26

Приклад 3.9

Експериментально знайдена залежність величини Y від X виглядає так.

X	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	19,6	25,2	14,8	10,3	1,3	-5,0	-5,3	-15,2	-7,3	-6,6	11,8

За допомогою методу найменших квадратів знайти рівняння апроксимуючої кривої у вигляді полінома. Визначити оптимальне значення ступеня полінома.

З таблиці видно, що найбільший можливий ступінь полінома – 10. За допомогою системи рівнянь (3.21) обчислимо коефіцієнти поліномів

ступеня k від 1 до 10, і для кожного з них знайдемо дисперсії S_k^2 за формулами (3.25).

Результати обчислень показано нижче в таблиці:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_k^2	103,2	46,6	11,3	13,2	11,0	13,4	15,1	22,1	7,7	0

Видно, що спочатку при збільшенні ступеня полінома від 1 до 3 значення S_k^2 швидко зменшуються від 103,2 до 11,3. Потім його значення коливається, але залишається в межах 10 ... 20. Тільки при $k = 10$ воно стає дорівнює нулю.

Останнє пояснюється це тим, що в цьому випадку апроксимуюча крива проходить через усі експериментальні точки і різниці в сумі формули (3.25) стають рівними нулю. Але це не свідчить про правильність такої апроксимації, оскільки при цьому ніяк не усувається вплив помилок експерименту.

Навіть без використання формули (3.26) видно, що оптимальним є значення $k = 3$. Тоді, $S_k^2 = 11,3$, що значно менше, ніж при $k = 1$ і $k = 2$. При великих значеннях k величина S_k^2 змінюється мало.

Рівняння апроксимуючої кривої при цьому виглядає так:

$$f(x) = 3,02 - 14,94x + 0,60x^2 + 1,74x^3. \quad (3.27)$$

На рис. 3.16 точками показано експериментальну залежність $Y(X)$ і суцільною лінією – крива.

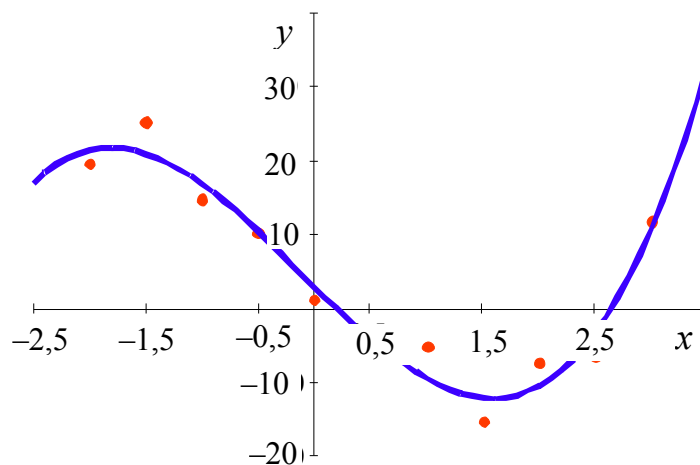


Рис. 3.16. Поліноміальна апроксимація МНК

3.3. Завдання до розділу 3

3.3.1. Лінійна залежність МНК

У задачах 3.1–3.18 знайти параметри a_0 і a_1 апроксимуючої функції $y = a_0 + a_1x$ і похибки визначення цих параметрів Δa_0 і Δa_1 при довірчій ймовірності $P = 0,95$. Побудувати графіки залежності $y(x)$.

3.1

X_n	Y_n
2	4,5
4	7,0
6	8,0
8	7,5
10	9,0

3.2

X_n	Y_n
1	10,2
2	7,8
3	6,3
4	4,1
5	1,7

3.3

X_n	Y_n
10	1,1
12	3,2
14	4,8
16	7,3
18	9,4

3.4

X_n	Y_n
1,0	29,4
1,5	25,3
3,0	20,2
4,5	14,8
6,0	10,7

3.5

X_n	Y_n
10	0,21
15	0,38
20	0,64
25	0,82
30	0,95

3.6

X_n	Y_n
0,2	12,4
0,4	14,7
0,6	18,2
0,8	21,1
1,0	23,2

3.7

X_n	Y_n
50	50,3
100	38,9
150	30,2
200	19,3
250	11,1

3.8

X_n	Y_n
-10	113,2
-8	98,3
-6	90,1
-4	80,3
-2	68,2

3.9

X_n	Y_n
30	11,4
35	4,8
40	-0,1
45	-5,2
50	-10,4

3.10

X_n	Y_n
1	-2,3
2	-6,9
3	-12,4
4	-17,3
5	-21,9

3.11

X_n	Y_n
2	3,2
3	3,8
4	4,9
5	4,8
6	5,8

3.12

X_n	Y_n
2	0,7
4	4,8
6	9,4
8	12,8
10	17,3

3.13

X_n	Y_n
1	10,6
2	7,6
3	6,8
4	3,6
5	1,4

3.14

X_n	Y_n
2	2,4
4	4,6
6	7,8
8	8,6
10	11,6

3.15

X_n	Y_n
1	3,2
2	3,8
3	4,9
4	4,8
5	5,8

3.16

X_n	Y_n
1	0,35
2	0,90
3	1,70
4	1,90
5	2,65

3.17

X_n	Y_n
1	0,7
2	1,8
3	3,4
4	3,8
5	5,3

3.18

X_n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Y_n	24,62	25,78	15,70	2,69	-7,31	-7,10	-14,02	-23,94	-36,33	-47,20

3.19. Знайти значення параметрів прямої a_0 , a_1 і оцінити похибки визначення Δa_0 , Δa_1 при $P = 0,9$. Побудувати графік.

X_n	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
Y_n	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

3.20. Знайти значення параметрів прямої a_0 , a_1 і оцінити похибки визначення Δa_0 , Δa_1 при $P = 0,99$. Побудувати графік.

X_n	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	21,9	23,6
Y_n	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	40,0	44,9	43,0

3.21. Знайти значення параметрів прямої a_0 , a_1 прямої $y = a_0 + a_1x$. Побудувати графік.

n	X_n	Y_n								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-5	-12,5	-8,4	-12,6	12,9	10,1	9,2	0,6	2,0	-10,60
2	-4	-10,5	-7,6	-10,1	10,8	7,5	8,9	1,1	2,1	-8,62
3	-3	-9,9	-7,6	-9,2	6,5	3,8	6,3	1,2	2,0	-4,86
4	-2	-6,2	-6,6	-3,7	5,8	4,2	6,5	2,0	2,2	-0,41
5	-1	-6,0	-6,6	-3,0	1,7	0	4,5	2,2	1,9	1,48
6	0	-2,4	-5,6	2,4	1,9	0,5	4,5	3,0	2,2	5,02
7	1	-1,3	-5,6	3,6	-2,2	-4,2	2,3	3,1	1,9	4,95
8	2	1,8	-4,7	7,4	-1,3	-3,4	2,6	4,1	2,1	6,71
9	3	3,4	-4,1	10,9	-3,8	-5,8	1,0	5,0	2,0	12,00
10	4	5,7	-3,9	13,2	-5,9	-7,2	0,1	5,0	2,0	16,85
11	5	7,0	-3,8	15,8	-9,4	-12,5	-1,9	5,3	1,8	19,12

3.22. Знайти значення параметрів прямої a_0 , a_1 прямої $y = a_0 + a_1x$. Побудувати графік.

n	X_n	Y_n							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3	-7,92	8,61	-27,00	-0,85	18,43	24,62	-29,35	10,56
2	-2	-7,45	5,06	-20,34	-0,92	17,84	25,78	-16,06	8,76
3	-1	8,00	5,89	-9,27	-1,11	15,24	15,70	-17,60	7,40
4	0	8,44	4,62	-2,58	-0,81	9,14	2,69	-5,18	7,58
5	1	13,23	-0,70	6,87	-1,04	3,78	-7,31	2,87	5,51
6	2	9,21	-4,43	4,42	-0,97	-4,51	-7,10	6,46	4,26
7	3	19,54	-6,07	17,22	-1,19	-3,23	-14,02	23,41	4,62
8	4	20,87	-7,56	23,68	-0,99	-10,93	-23,94	35,73	2,20
9	5	23,66	-10,56	26,62	-0,99	-13,14	-36,33	34,77	1,42
10	6	18,07	-18,69	30,12	-0,97	-24,78	-47,20	37,43	1,91

n	X_n	Y_n							
		9	10	11	12	13	14	15	
1	-3	15,58	3,05	-5,67	25,70	12,37	-3,70	1,07	
2	-2	6,02	2,82	-4,01	13,42	2,21	-3,87	0,90	
3	-1	7,44	2,85	-2,66	11,84	-5,24	-2,10	0,92	
4	0	3,91	2,92	-1,23	6,97	-1,45	-1,14	0,92	
5	1	-0,92	3,18	-0,13	-3,85	-7,86	-0,31	0,99	
6	2	-5,17	2,92	0,73	-2,76	-26,70	0,19	1,00	
7	3	-5,78	3,07	1,89	-9,90	-29,54	2,81	1,08	
8	4	-6,90	2,85	1,46	-15,60	-40,33	3,90	1,09	
9	5	-11,62	2,85	2,22	-28,26	-44,18	3,73	0,92	
10	6	-18,57	3,04	3,80	-36,89	-54,09	4,77	0,94	

3.23. Знайти значення параметрів прямої a_0 , a_1 прямої $y = a_0 + a_1x$. Побудувати графік.

n	X_n	Y_n							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	-4	-6,32	1,95	-3,85	3,21	4,34	-7,31	-21,44	9,09
2	-3	-2,02	-0,28	-2,43	3,23	5,78	-7,34	-17,69	4,79
3	-2	-0,01	-1,98	-1,06	2,81	0,70	-5,69	-11,81	7,49
4	-1	-0,02	-1,71	-0,42	2,79	1,47	-5,60	-7,69	1,38
5	0	1,62	-2,63	0,26	2,83	-3,92	-4,96	-5,62	-1,22
6	1	6,21	-3,78	0,65	3,16	-4,73	-2,59	-1,53	-4,95
7	2	6,99	-5,24	2,80	3,07	-7,81	0,75	5,12	-9,51
8	3	9,20	-5,10	2,93	2,85	-8,91	0,20	9,55	-11,28
9	4	12,73	-7,90	3,41	3,20	-8,26	1,29	14,35	-19,29
10	5	11,50	-7,92	4,80	2,81	-12,08	1,38	14,32	-24,79

n	X_n	Y_n						
		9	10	11	12	13	14	15
1	-3	-2,87	17,80	-17,59	-8,42	-15,29	12,18	-8,62
2	-2	-2,20	11,67	-15,28	-7,76	-10,22	9,12	-4,86
3	-1	-1,84	9,11	-7,09	-1,90	-8,05	8,56	-0,41
4	0	0,95	2,60	-4,48	-2,98	-1,25	1,77	1,48
5	1	0,32	-1,65	1,89	2,52	-0,67	2,71	5,02
6	2	1,50	-7,89	2,41	2,16	6,90	-2,35	4,95
7	3	2,58	-8,67	6,86	2,63	9,20	-3,69	6,71
8	4	5,31	-11,54	10,89	4,43	10,99	-4,37	12,00
9	5	3,70	-16,88	14,75	10,39	14,12	-7,24	16,85
10	6	7,19	-23,76	17,29	9,67	20,87	-8,51	19,12

3.24. Знайти значення параметрів a_0 і a_1 лінійної залежності та побудувати графік за наступними даними:

X_n	1	1,5	3	4,5	5
Y_n	1,25	1,49	1,50	1,75	2,25

3.25. Залежність концентрації розчину від температури наведено в таблиці. Знайти параметри залежності, вважаючи, що вона є лінійною, та побудувати графік.

$t, ^\circ\text{C}$	-10	-5	0	5	10	15
$C, \%$	10	12	14	16	18	20

3.26. Нижче в таблиці наведені дані про кількість народжень (X) і смертей (Y) на 1000 чол. населення в Англії за 9 років. Побудувати графік за цими даними. Встановити, чи є залежність між ними, і якщо є, знайти її параметри. Оцінити похибку їх визначення.

X	18,5	16,4	15,5	14,3	13,2	8,6	5,1	4,9	1,7
Y	9,4	8,9	8,7	7,7	6,0	4,3	4,4	2,2	2,1

3.27. За наведеними даними перевірити, чи є залежність між мінімальним (X) і максимальним (Y) артеріальним тиском у людини. Знайти параметри цієї залежності. Оцінити похибку їх визначення.

X	63	68	73	78	83	88	93	95	98
Y	107	112	119	122	123	130	130	129	133

3.3.2. Нелінійна залежність МНК

У задачах 3.28–3.45 за допомогою методу найменших квадратів знайти параметри апроксимуючої функції. Провести лінеаризацію залежності. Побудувати графіки вихідної та лінеаризованої залежностей, на які нанести експериментальні точки та теоретичні криві.

3.28. Функція $y = a10^{bx}$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	1,77	4,52	4,01	4,47	5,15	9,64	10,99	14,11	14,97	18,51

3.29. Функція $y = ab^x$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	2,30	3,66	5,78	4,86	5,49	9,96	14,19	16,70	19,58	27,26

3.30. Функція $y = ae^{bx}$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	6,94	6,34	4,52	2,03	1,49	1,85	2,06	1,44	0,64	0,08

3.31. Функція $y = 1/(a + bx)$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,614	0,584	0,446	0,249	0,275	0,281	0,251	0,214	0,164	0,132

3.32. Функція $y = a \ln x + b$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,37	1,37	1,79	1,74	1,90	2,35	2,50	2,72	2,67	2,77

3.33. Функція $y = a + b/x$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	2,87	2,17	1,86	1,35	1,19	1,39	1,34	1,39	1,19	1,17

3.34. Функція $y = 1/(a + b/x)$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,18	0,76	1,02	0,90	1,04	1,49	1,64	1,88	1,85	1,97

3.35. Функція $y = 1/(a + be^{-x})$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,92	1,92	2,86	4,03	4,30	5,16	4,74	5,27	5,17	5,92

3.36. Функція $y = ax^b$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,83	10,7	7,66	10,1	26,8	28,2	32,0	48,3	53,8	59,8

3.37. Функція $y = 1/(a + bx^2)$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	1,65	1,17	0,69	0,42	0,39	0,19	0,11	0,21	0,16	0,12

3.38. Функція $y = ax^b$.

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	-0,3	1,6	2,5	3,9	4,1	4,3	4,8	5,4	6,1	5,7

3.39. Функція $y = ab^x$.

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	-0,6	-0,1	0,2	2,0	4,0	2,1	3,9	9,1	13,1	17,7

3.40. Функція $y = 1/(ax + b)$.

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	0,66	0,45	0,40	0,34	0,29	0,21	0,19	0,20	0,22	0,16

3.41. Функція $y = a + b/x$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	1,98	1,23	1,04	0,90	0,76	0,74	0,73	0,69	0,66

3.42. Функція $y = 1/(a + bx)$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,182	0,141	0,083	0,085	0,040	0,038	0,030	0,022	0,032	0,025

3.43. Функція $u = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

T_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
U_n	8,0	7,0	6,0	5,3	4,6	4,0	3,5	3,0	2,7	2,4	2,0

3.44. Функція $y = ae^{bx}$.

X_n	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Y_n	6,963	4,749	3,156	1,607	1,206	0,456	0,978	0,587	0,386	0,297

3.45. Функція $y = a + b/x$.

X_n	2	4	6	12
Y_n	8,00	5,25	3,50	3,25

3.50. Функція $y = a + b/x$.

X_n	2	4	6	12
Y_n	8	5,25	3,50	3,25

3.51. Функція $y = a + b/x$.

X_n	5,67	4,45	3,84	3,74	3,73	2,18
Y_n	6,8	8,5	10,5	10,2	6,8	11,8

3.52. Функція $y = a + b/x$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	16,50	13,75	13,31	12,50	13,52	12,75	12,30	12,83	12,28	12,34

3.53. Функція $y = a + b \ln x$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_n	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81	2,87	2,91	2,96	3,03	3,05	3,12

3.54. Функція $y = a + b \ln x$.

X_n	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
Y_n	4,39	4,75	4,98	5,11	5,12	5,18	5,28	5,36	5,45	5,52	5,53	5,57

3.55. Функція $y = a + be^{0,1x}$.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_n	0,10	0,21	0,43	0,51	0,62	0,81	1,01	1,23	1,47	1,53	1,75	2,25

3.56. Функція $y = a + be^{0,1x}$.

X_n	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Y_n	4,11	4,16	4,23	4,29	4,36	4,42	4,53	4,57	4,63	4,75	4,87	4,88	5,01

3.57. Перетворити нелінійні моделі на лінійні:

а) $y = e^{a-bx}$; б) $\frac{1}{y} = a + \frac{1}{bx}$; в) $y = a \ln x + b$;

г) $y = ax^b$; д) $y = \frac{x}{a + bx}$.

3.58. Атмосферний тиск пов'язаний з висотою над поверхнею Землі співвідношенням

$$p = p_0 e^{-\frac{k}{T}h},$$

де p_0 – тиск біля поверхні Землі, k – постійна величина, T – абсолютна температура. Знайти параметри p_0 і k/T за результатами вимірювань залежності тиску від висоти.

h , м	2000	4000	6000	8000	10000	12000
p , мм. рт. ст.	591	436	352	295	220	191

3.59. При дослідженні залежності тиску p насиченої пари від питомого об'єму v , складено наступну таблицю:

v , м ³ /кг	3,334	1,630	0,866	0,423	0,265	0,170	0,115
p , Н/см ²	0,482	1,034	2,027	4,247	7,164	11,48	17,60

Вважаючи, що функціональна залежність між цими величинами має вигляд

$$p = \alpha v^\beta,$$

знайти значення параметрів α і β .

3.60. Залежність питомого опору кварцу ρ від температури T має вигляд:

$$\rho = 10^{\frac{a}{T}+b}.$$

Знайти значення параметрів a і b , використовуючи експериментальні дані:

T, K	335	365	400	445	500	570	670
$\rho, \text{Ом}\cdot\text{см}$	$5 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{12}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	10^{10}

3.61. Дослідження залежності тривалості рішення системи лінійних рівнянь t від порядку системи n дало наступні результати (дослідження проводилося в 60-х роках):

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t, \text{хв}$	12	35	75	130	210	315	445	600	800

Припускаючи, що $t = An^\gamma$, знайти значення A і γ .

3.62. Отримано вибірку спостережень змінних X і Y :

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	62,1	87,2	109,3	127,3	134,7	136,2	136,9

Для представлення цих даних пропонується модель

$$y = \frac{x}{a + bx}.$$

Знайти значення параметрів a і b

3.3.3. Поліноміальна залежність МНК

В задачах 3.63–3.97 знайти параметри апроксимуючої залежності у вигляді полінома 2-го ступеня $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Побудувати графіки.

3.63

X_n	-3	-3	-1	0	1
Y_n	-6,7	-2,2	1,1	2,2	1,1

3.64

X_n	-2,1	-1,1	0,1	1,2	2,1
Y_n	-5,83	0,56	2,94	0,14	-5,83

3.65	X_n	1	2	3	4	5
	Y_n	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

3.66	X_n	1	2	3	4	6
	Y_n	1,5	3	5	7	10

3.67	X_n	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1	2,6
	Y_n	4,4	0,3	-2	-1,8	0,2	2,1

3.68	X_n	-3	-2	-1	0	1	2
	Y_n	-1,4	-4,3	-5,2	-4	-1,1	4,2

3.69	X_n	-2	-1	0	1	2	3
	Y_n	6,8	5,7	2,5	1,6	3,1	5,9

3.70	X_n	-2	-1	0	1	2	3
	Y_n	6,8	0,9	-1,1	1,1	7,2	16,7

3.71	X_n	-3,1	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1	2,5
	Y_n	-16,35	-2,04	8,38	15,19	16,74	14,27	12,62

3.72	X_n	-2,5	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1	3,1
	Y_n	38,12	30,76	15,18	5,19	2,04	5,47	15,15

3.73	X_n	-2	-1	0	1	2	3	4
	Y_n	20	10	3	2	3	7	14

3.74	X_n	-1	0	1	2	3	4	5
	Y_n	-9,8	-3,1	0,3	-1,2	-6,1	-14,7	-28,2

3.75	X_n	-3,1	-2,1	-1,1	0,5	1,1	2,1	3,1
	Y_n	-16,35	-2,06	8,38	16,02	16,74	14,27	8,04

3.76	X_n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Y_n	3,230	3,253	3,261	3,252	3,228	3,181	3,127	3,059

3.77	X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Y_n	0	1,1	3,8	10	14	28	32	54	58	90

3.78	X_n	1	2	3	4	5	6	7	8
	Y_n	0,3	1,7	3,4	5,8	9,4	13,6	18,6	24,1

3.79

X_n	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4
Y_n	0,94	3,01	4,56	8,59	13,9	20,5	28,3	37,4

3.80

X_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Y_n	25	4	6	30	32	32	11	16	21	19

3.81

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	0,22	0,31	0,56	1,06	1,72	2,67	3,72	5,11	6,64	8,32

3.82

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	0	1,1	3,8	10	14	28	32	54	58	90

3.83

X_n	-2,6	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1
Y_n	2,5	3,8	5	4,1	0,6	-4,6

3.84

X_n	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y_n	-10	0	4	5	4	2	-2

3.85

X_n	5	10	15	20	25
Y_n	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

3.86

X_n	Y_n											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-4	26,9	-21,6	-42,4	-5,1	15,0	-11,2	2,9	14,9	-17,0	6,1	33,9	24,3
-3	13,6	-12,6	-22,5	-1,6	11,7	-8,2	2,5	9,3	-9,3	8,7	23,5	11,4
-2	6,0	-8,1	-12,0	-2,1	5,8	-6,5	2,0	3,8	-3,1	8,3	9,4	14,6
-1	3,7	0,3	3,5	4,8	2,1	-3,5	4,1	5,4	2,9	10,9	7,7	2,1
0	-5,0	-0,9	7,7	5,5	-6,5	-3,3	3,7	3,2	4,9	4,9	-1,3	-1,0
1	-2,2	3,5	11,9	15,0	-5,3	-1,4	6,8	6,9	8,0	0,5	-1,9	3,6
2	-4,3	-0,5	9,1	16,4	-15,8	-2,9	6,8	9,9	4,1	-7,0	-5,3	5,1
3	1,3	-0,4	5,4	28,2	-18,5	-2,3	12,6	18,8	3,4	-14,1	-3,0	12,4
4	9,9	-3,5	-1,5	33,7	-24,0	-3,6	15,0	26,1	-1,0	-25,8	2,3	24,1
5	15,6	-12,5	-15,2	40,3	-34,8	-5,3	19,9	37,0	-8,6	-39,7	-5,3	37,6

3.87

X_n	-4	-2	0	2	4
Y_n	18,2	1,5	-6,5	6,3	33,5

3.88

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	0	0,9	4,4	8	18	22	40	44	70	73

3.89

X_n	0	2	4	6	8	10
Y_n	5	-1	-0,5	1,5	4,5	8,5

3.90	X_n	0,07	0,31	0,61	0,99	1,29	1,78	2,09
	Y_n	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25	2,01	2,60

3.91	X_n	26	30	34	38	42	46	50
	Y_n	3,94	4,60	5,67	6,93	8,25	7,73	10,55

3.92	X_n	-2	-1	0	1	2
	Y_n	4,8	0,4	-3,4	0,8	3,2

3.93	X_n	-3	-2	-1	0	1	2	3
	Y_n	-10	0	4	5	4	2	-2

3.94	X_n	-3	-2	-1	0	1	2	3
	Y_n	6	0	-1	-1	1	5	12

3.95	X_n	-2	-1	0	1	2
	Y_n	3	0	3	6	9

3.96	X_n	-3	-2	-1	0	1	2	3
	Y_n	-6	-4	-2	-1	1	1	0

3.97	X_n	0	1	2	3	4	5	6	7
	Y_n	0,1	1,0	1,3	1,9	2,0	2,4	2,45	3,0

3.98 Знайти параметри апроксимуючої залежності у вигляді полінома 2-го ступеня $y = a_0 + a_2x^2$. Побудувати графіки.

X_n	Y_n					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	2	0	-1
2	3	1,5	6	8	-2	-1,5
3	7	3	13	24	-6	-2
4	12	5	24	43	-11	-3
5	19	6	37	68	-18	-4,5

3.99. Знайти параметри апроксимуючої залежності у вигляді полінома 3-го ступеня $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Побудувати графіки.

X_n	Y_n								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,0	–	-0,931	-21,4	-13,0	–	-42,0	–	-30,0	–
-1,5	-28,2	7,73	-3,28	1,01	-39,7	-16,6	-20,9	-7,85	-23,7
-1,0	-4,14	9,77	5,12	4,96	-12,0	-7,35	-4,69	1,81	-6,36
-0,5	6,71	7,46	7,67	3,34	-0,053	-7,36	-0,974	2,69	-1,20
0	6,40	6,63	7,34	-0,214	5,08	-8,02	-3,22	1,63	-4,60
0,5	4,88	8,58	5,53	1,73	4,64	-8,03	-7,41	7,30	-7,48
1,0	4,00	18,6	5,19	14,1	4,30	2,21	-13,2	22,7	-5,56
1,5	9,57	–	9,71	–	5,62	27,8	-10,4	52,9	6,68
2,0	29,2	–	16,2	–	18,06	–	-4,35	–	33,8

X_n	Y_n								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
-2,0	–	-27,4	-33,3	-13,9	-33,7	–	-7,62	22,3	4,05
-1,5	-46,5	-2,83	-10,3	-4,16	-16,0	-23,8	-6,24	18,8	8,13
-1,0	-17,6	8,26	-2,47	-0,718	-4,39	-7,04	-4,88	10,5	8,85
-0,5	-3,86	12,1	-4,51	1,55	0,466	3,39	-4,70	2,79	5,92
0	0,289	8,49	-9,55	-2,47	1,43	8,66	-3,77	-1,65	5,54
0,5	-0,576	3,77	-12,0	-0,355	-1,18	12,7	-0,66	-2,53	10,9
1,0	1,90	-3,62	-1,09	0,653	-7,91	20,9	3,11	2,21	21,6
1,5	14,5	-5,10	25,8	10,1	-16,2	32,9	8,00	17,8	45,0
2,0	43,6	-2,29	–	27,9	-24,5	–	17,9	–	–

У задачах 3.100–3.102 визначити оптимальний ступінь полінома $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, що апроксимує експериментальні дані.

3.100

X_n	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Y_n	0	4	8	13	18	24	29	35	42	50

3.101

X_n	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
Y_n	5,01	5,02	5,32	6,13	7,41	9,98	14,30	20,95	30,10	44,03	60,50	75,20

3.102

X_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_n	26,6	43,2	-24,9	69,1	58,5	140,7	201,7	350,0	470,3	759,0

ЗВІТ ПРО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Звіт про виконання лабораторної роботи є одним з видів технічної документації і має відповідати вимогам стандартів [3, 4].

4.1. Правила оформлення звіту

1. Звіт виконується кожним студентом самостійно.
2. Звіт оформляється на білому папері формату А4 (210 x 297 мм) з одного боку аркуша одним із таких способів:
 - рукописним – чітким, розбірливим почерком з висотою букв і цифр не менше 2,5 мм. Відстань між основами рядків – 8–10 мм;
 - машинописним – через 1,5–2 інтервали. Формули мають бути вписані від руки чорною пастою або тушшю;
 - із застосуванням друкуючих пристроїв або принтерів ЕОМ – через 1–1,2 інтервали, висота букв і цифр не менше 1,8 мм, колір – чорний.
3. Сторінки звіту нумеруються арабськими цифрами, слід дотримуватися наскрізної нумерації впродовж усього тексту звіту. Номер сторінки проставляється в правому верхньому куті без крапки в кінці. На титульному листі номер сторінки не ставиться.
4. Розділи повинні мати порядкові номери в межах усього звіту, позначатися арабськими цифрами і записуватися з абзацного відступу. Номер і заголовки розділу пишуться на окремому рядку. Крапка наприкінці номерів розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів не ставиться.
5. Текст звіту слід писати (друкувати), дотримуючись таких розмірів полів: ліве – 25 мм, праве – 10 мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм. Абзаци в тексті починають відступом, що дорівнює, п'яти ударам клавіатури ЕОМ або друкарської машинки (15–17 мм).
6. У звіті слід застосовувати стандартизовані одиниці фізичних величин, їх найменування та позначення.
7. Умовні буквені позначення, зображення або знаки мають відповідати прийнятим у чинному законодавстві державним стандартам. У тексті звіту перед позначенням параметру дають його найменування, наприклад: «температура навколишнього середовища T ».
8. Формули, на які є посилання в тексті, нумеруються в межах розділу арабськими цифрами. Номер формули складається з номера розділу і порядкового номера формули, розділених крапкою, наприклад:

(2.1) – перша формула другого розділу. Номер формули береться в дужки і розміщується на межі правого поля. При посиланні в тексті на формулу слід вказувати її повний номер у дужках, наприклад, «у формулі (3.2)».

9. Цифровий матеріал, розташований у звіті, рекомендується оформляти у вигляді таблиць. Кожна таблиця повинна мати змістовний заголовок. Заголовок розташовують над відповідною таблицею після слова «Таблиця». Слово «Таблиця» і заголовок починають з великої літери. Таблицю слід розташувати після першого згадування про неї в тексті так, щоб читати її без повороту звіту. Якщо й це неможливо, таблицю розташовують так, щоб для її читання звіт треба було повернути за годинниковою стрілкою.

10. Таблиці мають нумеруватися в межах звіту арабськими цифрами. Над правим верхнім кутом таблиці розташовують напис «Таблиця» із зазначенням її порядкового номера. Номер таблиці складається з номера розділу і порядкового номера таблиці, розділених крапкою, наприклад, «Таблиця 3.1» (перша таблиця третього розділу). При посиланні на таблицю вказують її повний номер. Слово «Таблиця» пишуть у скороченому вигляді, наприклад, табл. 3.1.

Таблиця (номер)

Назва таблиці

11. Якщо в стовпці або рядку таблиці числа мають однаковий десятковий множник, його слід виносити в заголовок. Одиниці вимірювань також розташовуються в заголовку і виділяються комою. Цифрові дані в стовпці повинні мати однакову кількість значущих цифр.

12. Усі ілюстрації (фотографії, схеми, креслення, графіки тощо) називаються **рисунками**. Рисунки розташовуються відразу після посилання на них у тексті. Нумерація рисунків – подвійна. Вона містить номер розділу і порядковий номер рисунку, наприклад: Рис. 1.2 (другий рисунок першого розділу). Підпис розташовується нижче зображення та пояснювальних даних симетрично до ілюстрації. Наприклад: «Рис. 1.1. Схема установки». Назва рисунка формулюється словами без скорочень і символів.

13. Графіки та діаграми мають бути чіткими і наочно ілюструвати отримані результати. Значення величин, пов'язаних функціональною залежністю, слід відкладати на осях координат у вигляді шкал. У прямокутній системі координат незалежну змінну слід відкладати на горизон-

тальній осі (осі абсцис), позитивні значення величин – на осях праворуч і вгору від точки початку відліку.

14. Осі координат у діаграмах без шкал закінчуються стрілками, що вказують напрямки зростання значень величин. У діаграмах зі шкалами стрілки не ставляться.

15. Значення величин можуть відкладатися на осях координат у лінійному або нелінійному (наприклад, логарифмічному) масштабах. Масштаб може бути різним для кожного напрямку координат.

16. Як шкалу слід використовувати координатну вісь або лінію координатної сітки, яка обмежує поле діаграми. Координатні осі як шкали значень зображуваних величин слід поділяти на графічні інтервали одним із таких способів – координатною сіткою, подільними штрихами, поєднанням координатної сітки і подільних штрихів.

17. Відстань між подільними штрихами і (або) лініями слід вибирати з урахуванням призначення діаграми і зручності відліку проміжних значень. Масштаб вибирається таким, щоб експериментальні точки не зливалися одна з одною і з розумним інтервалом займали все поле графіка. Масштаб має бути простим – 1 см шкали має відповідати 1, 2, 4, 5 або 10 одиницям вимірюваної величини.

18. Біля ліній сітки або подільних штрихів мають бути вказані відповідні числа – значення величин. Якщо початок відліку шкали – нуль, його слід вказувати один раз біля точки перетину осей. Частоту нанесення числових значень і проміжних поділок шкал слід вибирати з урахуванням зручності користування діаграмою.

19. Числа біля шкал слід розміщувати поза полем діаграми і розташовувати горизонтально. Багатозначні числа слід переважно висловлювати як кратні 10^n , де n – ціле число.

20. Розмір експериментальних точок має бути в 3–4 рази більше товщини лінії, яка біля них проводиться. Якщо на графіку є дві або більше кривих, то криві позначаються цифрами або символами, які пояснюються в тексті або в підпису до рисунка.

21. Масштаб графіка має бути таким, щоб експериментальна крива займала практично всю площу рисунка. Для цього початком відліку шкал може бути не нуль, а близьке до мінімального вимірюваного округлене значення величини. Кінець шкали має бути близьким до максимального вимірюваного значення цієї величини.

4.2. Зміст звіту

Звіт має включати наступні розділи:

- титульний аркуш;
- вступ;

- опис приладу та методики експерименту;
- основні розрахункові формули;
- результати роботи та їх аналіз;
- висновок.

Титульний аркуш

Титульний аркуш є першим аркушем звіту. Номер сторінки на ньому не ставиться. Наступний за титульним аркуш нумерується цифрою 2.

Вступ

Вступ має стисло характеризувати досліджуване явище (процес, закон, прилад). У вступі слід вказати мету даної роботи. Вступ має бути лаконічним і не перевищувати трьох-п'яти позицій. Вступ є першим розділом звіту.

Вступ не нумерується.

1. Опис установки та методики експерименту

У розділі слід навести схему установки (приладу). Треба вказати метод, який використовується. Обов'язково слід навести методику експерименту, що полягає в короткому викладі його суті (одне-два речення). Потрібно вказати, які параметри досліджуваної системи змінюються в процесі роботи і що при цьому вимірюється. У тому випадку, коли лабораторна робота складається з декількох завдань, необхідно для кожного з них навести свою методику вимірювань.

2. Основні розрахункові формули

У даному розділі наводяться ті формули, які використовуються при обробці результатів експерименту, включаючи формули для розрахунку похибок вимірювань. Усі проміжні формули не наводяться.

Значення символів і числових коефіцієнтів мають наводитися безпосередньо під формулою в тій послідовності, в якій вони знаходяться у формулі. Значення кожного символу і числового коефіцієнта слід давати з нового рядка. Перший рядок пояснення починають зі слова «де», двокрапка після нього не ставиться.

3. Результати роботи та їх аналіз

У цьому розділі має викладатися зміст виконуваної роботи: розрахунки, результати експерименту та їх аналіз. Необхідно наводити числові розрахунки, роблячи посилання на використані формули. Якщо розрахункова величина має розмірність, необхідно її вказувати.

4. Висновок

У висновку формулюються висновки роботи. У тих випадках, коли метою роботи є вивчення законів чи явищ, у висновках необхідно вказати, чи підтверджуються експериментом закони (явища), що розглядаються. Критерієм підтвердження закону (явища) є той факт, що експериментальні точки на графіку розташовуються уздовж теоретичної кривої в межах довірчих інтервалів.

У тих випадках, коли в ході виконання лабораторної роботи вимірюються відомі константи, необхідно провести порівняння отриманих розрахунків з табличними даними.

Слід зазначити можливі причини розбіжності теоретичних та експериментальних результатів.

У висновках слід навести значення вимірюваних величин із зазначенням абсолютних і відносних похибок, не забуваючи при цьому вказувати розмірність цих величин.

Висновок не нумерується.

ЧАСТИНА 2

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Робота № 1

ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Мета роботи

Вимірювання прискорення вільного падіння й оцінка похибки отриманого результату [1, 10, 11].

Прискорення вільного падіння

Прискорення вільного падіння визначає величину сили тяжіння тіла в точці вимірювання. Існує область науки – гравіметрія, – яка займається вимірюванням величин, що характеризують земне гравітаційне поле. Методи гравіметрії використовуються для дослідження контурів планети, розвідки корисних копалин за аномаліями сили тяжіння та інших цілей.

Сила тяжіння F у будь-якій точці поверхні Землі або над нею є рівнодіючою двох сил – сили тяжіння Землі F_g і центру обіжної (відцентрової) сили F_r , що виникає в результаті обертання Землі (рис 1.1).

Сила тяжіння відповідно до закону всесвітнього тяжіння визначається так:

$$F_g = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1.1)$$

де m – маса тіла, $G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравітаційна стала, $M = (5,973 \pm 0,004) \cdot 10^{24} \text{ кг}$ – маса Землі, R – відстань від точки спостереження до центру Землі.

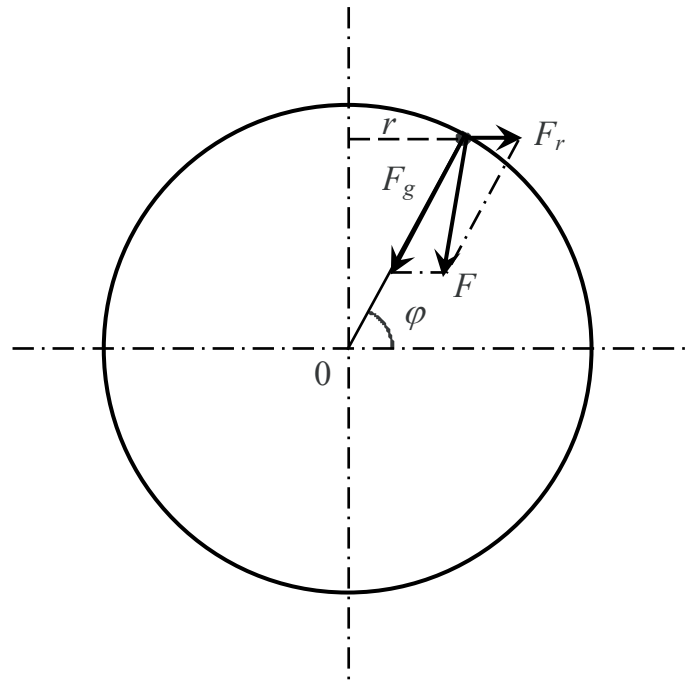


Рис. 1.1. Сила тяжіння та її складові

Поверхня Землі носить назву геоїда. У середньому вона збігається з незбуреною припливами поверхнею океанів. Від геоїда відлічуються всі висоти точок на Землі.

Відцентрова сила визначається так:

$$F_r = m\omega^2 r, \quad (1.2)$$

де ω – кутова швидкість обертання Землі, r – відстань точки від осі обертання. Якби Земля була кулею радіуса r_0 , то справедливим було б співвідношення $r = r_0 \cos \varphi$ (φ – широта розташування точки на поверхні Землі). Але Земля – геоїд, який близький за формою до еліпсоїда обертання (екваторіальний радіус Землі $a = 6,378142 \cdot 10^6$ м, полярний – $b = 6,356757 \cdot 10^6$ м).

Зробимо оцінку величину прискорення вільного падіння на поверхні Землі, вважаючи що Земля – це куля радіусом $R = \frac{a+b}{2} = 6,367 \cdot 10^6$ м. Гравітаційна складова сили тяжіння дається формулою (1.1). Відцентрову силу інерції оцінимо за формулою

$$F_r = m \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi, \quad (1.3)$$

де $T = 24$ години = 86400 с – період обертання Землі навколо своєї осі.

З трикутника сил, зображеного на рис. 1.1, випливає, що сила тяжіння дорівнює

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_r^2 - 2F_g F_r \cos \varphi}.$$

Підставивши сюди вирази (1.1) і (1.3) і відокремивши множник m , отримаємо наступний вираз для прискорення вільного падіння:

$$g = \sqrt{\left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 + \frac{8\pi^2}{T^2} \left(\frac{2\pi^2 R^2}{T^2} - \frac{GM}{R}\right) \cos^2 \varphi}.$$

Для широт 0° (екватор), 45° і 90° (полюс) ця формула дає наступні значення прискорення вільного падіння:

$$g(0^\circ) = 9,798 \text{ м/с}^2, \quad g(45^\circ) = 9,815 \text{ м/с}^2, \quad g(90^\circ) = 9,832 \text{ м/с}^2.$$

Табличне значення для широти 45° дорівнює $9,80665 \text{ м/с}^2$.

Врахування сплюснутості Землі, її обертання і висоти місця вимірювання над рівнем моря враховується у формулі Кассініса:

$$g(\varphi, H) = g_0 \left(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi - 0,0003086H\right),$$

де H – висота над рівнем моря в метрах, $g_0 = 9,78049 \pm 0,00001 \text{ м/с}^2$.

Для наведених вище широт ця формула дає такі значення:

$$\begin{aligned} G(0^\circ, 0) &= 9,78049 \text{ м/с}^2, & g(45^\circ, 0) &= 9,80629 \text{ м/с}^2, \\ g(90^\circ, 0) &= 9,82969 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Значення для широти 45° є дуже близьким до табличного.

Для Харкова ($\varphi = 50^\circ$, $H = 100 \text{ м}$) – $g = 9,81036 \text{ м/с}^2$.

Математичний маятник

Математичний маятник – це точкова маса, яка підвішена на невагомій та нерозтяжній нитці і здійснює коливання під дією сили тяжіння.

З рис. 1.2 видно, що на масу діє момент сил

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (1.4)$$

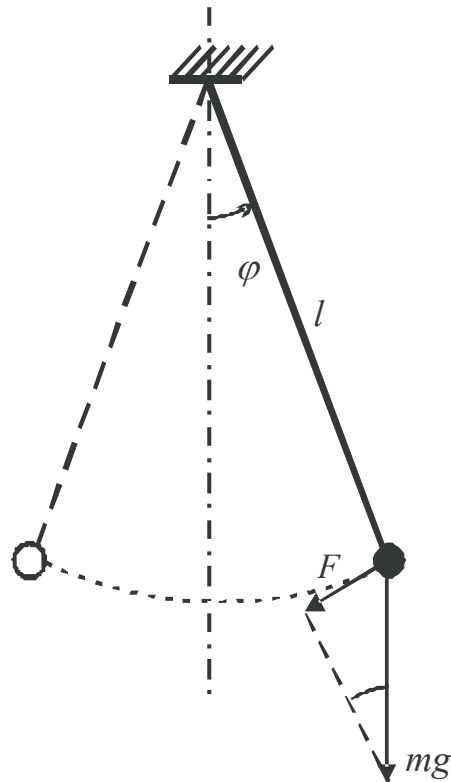


Рис. 1.2. Математичний маятник

Знак «мінус» вказує на те, що сила F вертає маятник у положення рівноваги.

Другий закон Ньютона для такої системи записується так:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1.5)$$

де $J = ml^2$ – момент інерції маятника.

З урахуванням формули (1.4) співвідношення (1.5) після деяких перетворень можна записати так:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.6)$$

де $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

У випадку малих коливань $\sin \varphi \approx \varphi$, і рівняння (1.6) описує гармонійні коливання з частотою ω_0 або періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.7)$$

Малими можна вважати коливання з амплітудою $\varphi \ll 1$ рад, тобто не більше 6° . У цьому випадку похибка формули (1.7) не перевищує 0,1 %.

З формули (1.7) випливає, що якщо виміряти довжину маятника l і період його коливань T , то за формулою

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (1.8)$$

можна знайти прискорення вільного падіння.

Основні джерела похибок при вимірюванні прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника

1. Відмінність маятника від математичного.

В експерименті завжди використовується фізичний маятник, тобто коливальна система з масою, розподіленою в певному об'ємі, а не розташованою в одній точці. У цьому випадку у формулу (1.8) має входити його ефективна довжина l_{ef} – відстань від точки підвісу до центру мас коливальної системи.

Оцінімо похибку, яка виникає при цьому, використовуючи теорему Штейнера [1]:

$$J = J_0 + ml^2, \quad (1.9)$$

де m – маса системи, l – відстань від точки підвісу до центру мас вантажу, J_0 – момент інерції вантажу щодо осі обертання, що проходить через його центр мас. У нашому випадку – це момент інерції циліндра відносно його поздовжньої осі:

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2,$$

де R – радіус циліндра. Можна вважати, що вся маса системи зосереджена у вантажі.

Вважаючи маятник математичним, ми нехтуємо у формулі (1.9) доданком J_0 порівняно з доданком ml^2 . Похибка, що виникає при цьому, дорівнює

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{ml^2 - J}{J} = \frac{-\frac{mR^2}{2}}{\frac{mR^2}{2} + ml^2}.$$

Після деяких перетворень цієї формули отримаємо:

$$\frac{\Delta J}{J} = -\frac{1}{1 + \frac{2l^2}{R^2}} \approx -\frac{R^2}{2l^2}.$$

Підстановка в цю формулу значень $R = 0,01\text{ м}$ і $l \approx 1\text{ м}$ дає

$$\frac{\Delta J}{J} = -0,005 \%. \quad (1.10)$$

Знехтувавши моментом інерції циліндра як об'ємного тіла, ми дещо занижуємо значення моменту інерції системи. На це вказує знак похибки. Але величина похибки є дуже малою.

2. Похибка визначення періоду коливань маятника, спричинена його залежністю від амплітуди

У формулу (1.8) має входити значення періоду коливань маятника при дуже малих амплітудах, хоча як при вимірах вона досягає 10° . Щоб оцінити похибку, спричинену цим фактором, необхідно знайти залежність періоду коливань від амплітуди.

Це можна зробити, розв'язавши рівняння (1.6) числовим методом або використавши наближену формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_{\max}}{2} \right)}, \quad (1.11)$$

де φ_{\max} – амплітуда коливань маятника.

Розрахунки за цією формулою дають наступні значення похибки.

φ_{\max}	$\frac{\Delta T}{T}$
10°	0,1 %
20°	0,4 %
30°	0,8 %

Таким чином, при амплітуді коливань до 10° похибка визначення періоду не перевищує 0,1 %. Наскільки сильно ця похибка впливає на результат обчислень прискорення вільного падіння, буде оцінено нижче.

3. Похибка визначення періоду коливань маятника, спричинена загасанням коливань

Коливання маятника поступово загасають. Відомо, що кругова частота загасаючих коливань визначається за формулою [1]:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (1.12)$$

де ω_0 – частота незгасаючих коливань, β – коефіцієнт загасання. Останній визначає зменшення амплітуди коливань з часом за законом

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (1.13)$$

Експеримент показує, що амплітуда коливань маятника, що використовується, зменшується приблизно на 10 % протягом 20 с. Використовуючи цей факт, із співвідношення (1.13) можна знайти, що

$$\beta = -\frac{\ln 0,9}{20} = 0,00526 \text{ с}^{-1}.$$

Кругова частота ω_0 маятника довжиною близько 1 м дорівнює приблизно 3 с^{-1} .

З формули (12) випливає, що похибка визначення частоти при нехтуванні згасанням дорівнює

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\beta}{2\omega_0^2}.$$

Для значень ω_0 і β , наведених вище,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 0,00015 \text{ \%}.$$

Це надзвичайно мала величина.

4. Випадкова похибка вимірювання довжини маятника.

Довжина маятника в роботі вимірюється рулеткою з міліметровими поділками. Положення точки підвісу і центру вантажу може бути визначене з похибкою близько 1 мм. Тому значення похибки вимірювання довжини маятника можна прийняти рівною 1,5 мм, що при довжині маятника 1 м дає значення відносної похибки

$$\frac{\Delta l}{l} = 0,15 \text{ \%}. \quad (1.14)$$

5. *Випадкова похибка вимірювання періоду коливань маятника.*

У роботі вимірюється час N повних коливань (періодів) маятника t . Головне джерело похибки при цьому – неточність моментів пуску та зупинки секундоміра. Можна вважати, що ця величина $\Delta t \approx 0,2$ с. Період коливань обчислюється за формулою

$$T = \frac{t}{N}.$$

Похибка визначення періоду T може бути оцінена так:

$$\Delta T = \frac{dT}{dt} \Delta t = \frac{\Delta t}{N}.$$

Для $N = 10$ виходить $\Delta T = 0,02$ с. Відносна похибка при періоді $T = 2$ с, відповідного довжині маятника 1 м, дорівнює

$$\frac{\Delta T}{T} = 1\%. \quad (1.15)$$

6. *Оцінка похибки визначення прискорення вільного падіння.*

Прискорення вільного падіння обчислюється за формулою (1.8). Оцінка похибки за правилами, що застосовуються до непрямих вимірювань, дає

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T\right)^2}.$$

Відносна похибка формули (1.8):

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2}. \quad (1.16)$$

Підставивши сюди значення $\frac{\Delta l}{l}$ і $\frac{\Delta T}{T}$ з формул (1.14) і (1.15), отримаємо:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{0,0225 + 4} \approx 2\%.$$

Видно, що головним джерелом похибки є похибка вимірювань періоду коливань. При виконанні роботи слід в першу чергу підвищувати точність вимірювання саме цієї величини.

7. Похибка визначення числа π .

При оцінці похибки в п. 6 похибка визначення числа π не враховувалася. Це можна робити, якщо число береться з достатньою кількістю значущих цифр. Визначимо цю кількість. Похибка числа π не буде позначатися на кінцевому результаті, якщо його похибка набагато менше найменшої похибки інших величин. Це буде, якщо похибка $\Delta\pi/\pi$ буде менше 0,01 %, тобто в числі π буде не менше 4 значущих цифр. Достатньо взяти значення $\pi = 3,142$.

Порядок виконання роботи

У лабораторній роботі маятником є свинцевий вантаж радіусом $R = 1$ см і висотою $H = 1$ см, укріплений на нитці довжиною близько 1,5 м (див. рис. 1.3).

Порядок дій такий.

1. Укріпити нитку маятника на кронштейні.

2. Виміряти довжину нитки l від точки підвісу до центру вантажу.

Вимірювання провести 5 разів. Результати занести в табл. 1.1. Обчислити середнє значення $l_{\text{сер}}$, оцінити похибку вимірювань при довірчій ймовірності 0,95.

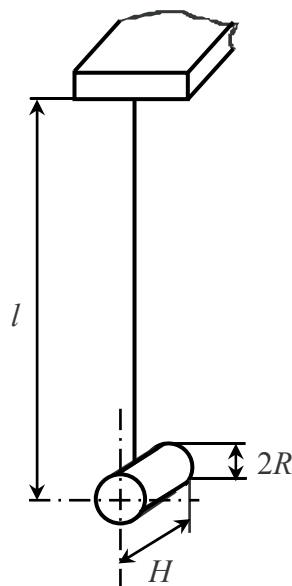


Рис. 1.3. Маятник

Таблиця 1.1

Вимірювання довжини підвісу маятника

n	$l_n, \text{с}$	$(l_n - l_{\text{сеп}})^2$
1		
2		
3		
4		
$N = 5$		

$$l_{\text{сеп}} = \frac{\sum_{n=1}^N l_n}{N} =$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (l_n - l_{\text{сеп}})^2}{N-1}} =$$

$$P = 0,95 \quad t(P; N) =$$

$$\Delta l = \frac{t(P; N)S}{\sqrt{N}} =$$

$$\frac{\Delta l}{l_{\text{сеп}}} =$$

3. Виміряти період коливань маятника.

3.1. Відвести вантаж в сторону на кут не більше 10° і відпустити.

3.2. Виміряти секундоміром час 10 повних коливань (періодів) t .

Обчислити значення періоду коливань $T = t/10$.

3.3. Вимірювання провести 5 разів. Результати занести в табл. 1.2.

Обчислити середнє значення $T_{\text{сеп}}$. Оцінити похибку вимірювань при довірчій ймовірності 0,95.

Таблиця 1.2

Вимірювання періоду коливань маятника

n	$T_n, \text{с}$	$(T_n - T_{\text{сеп}})^2$
1		
2		
3		
4		
$N = 5$		

$$T_{cp} = \frac{\sum_{n=1}^N T_n}{N} =, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (T_n - T_{cp})^2}{N-1}} =$$

$$P = 0,95, \quad t(P;N) =, \quad \Delta T = \frac{t(P;N)S}{\sqrt{N}} =, \quad \frac{\Delta T}{T_{cp}} =$$

4. За формулою (1.8) обчислити величину прискорення вільного падіння g . Вважати $\pi = 3,142$.

5. За формулою

$$\frac{\Delta g}{g_{cp}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T_{cp}}\right)^2} \quad (1.17)$$

оцінити відносну похибку вимірювань $\Delta g/g_{cp}$ і абсолютну похибку Δg .

6. Записати результат вимірювань у вигляді

$$g = g_{cp} \pm \Delta g$$

з урахуванням правил округлення значення похибки Δg і середнього значення вимірюваної величини g_{cp} .

7. Порівняти отриманий результат з результатом обчислень за формулою Кассініса для Харкова ($g = 9,50896 \text{ м/с}^2$). Чи узгоджуються ці результати між собою?

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- Результати обчислень l_{cp} , Δl , $\Delta l/l_{cp}$;
- Результати обчислень T_{cp} , ΔT , $\Delta T/T_{cp}$;
- Результати вимірювань прискорення вільного падіння g ;
- Результати обчислень Δg і $\Delta g/g_{cp}$.

Контрольні питання

1. Що таке прискорення вільного падіння? Що характеризує його величина в даній точці поверхні Землі?
2. Як спрямована сила тяжіння стосовно поверхні Землі?
3. Складові сили тяжіння (гравітаційна і відцентрова).
4. Як залежить величина прискорення вільного падіння від широти місцевості, висоти точки спостереження над поверхнею Землі та складу земної кори під поверхнею Землі в даному місці?

5. Що таке математичний маятник? Чим він відрізняється від фізичного маятника?

6. Розв'язати диференціальне рівняння коливань математичного маятника для малих коливань. Формула для періоду малих коливань маятника. Що таке малі коливання?

7. Процес вимірювань прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.

8. Чому краще вимірювати час 10 періодів коливань маятника, а не час одного періоду?

9. Що таке випадкова складова похибки вимірювань? Чим вона відрізняється від систематичної складової?

10. Як проводиться оцінка випадкової складової похибки ряду вимірювань?

11. Що таке довірна ймовірність і довірчий інтервал?

12. Вивести формулу (1.17).

Робота № 2

ВИМІРЮВАННЯ ВНУТРІШНЬОГО ОПОРУ МІКРОАМПЕРМЕТРА

Мета роботи

Виміряти внутрішній опір приладу методом вольтметра-амперметра. Оцінити похибку вимірювань [12, 13].

Внутрішній (вхідний) опір вимірювального приладу

Термін «внутрішній опір» належить до електромеханічних приладів. Його величина визначається опором дрітної котушки, наявної у всіх таких приладах, крім електростатичних, і шунтів або додаткових опорів (коли вони є).

Термін «вхідний опір» належить до електростатичних приладів з рухомою частиною та електронних приладів. Він визначається схемою вхідного ланцюга – її резисторами, конденсаторами, трансформаторами тощо.

Внутрішній (вхідний) опір приладу має бути таким, щоб включення цього вимірювального приладу в схему якомога менше порушувало режим її роботи. Так, опір амперметра, який завжди включається послідовно з іншими елементами електричного кола, має бути малим. Опір вольтметра та інших приладів, які включаються паралельно елементам ланцюга, має бути якомога більшим.

Методика вимірювань

Вимірювання внутрішнього опору приладу в лабораторній роботі заснована на використанні закону Ома.

Блок-схему експериментального приладу показано на рис. 2.1.

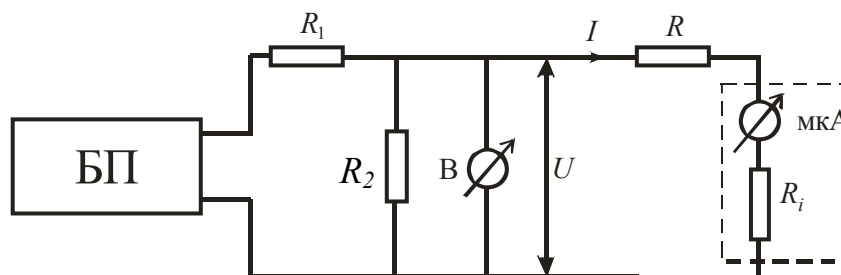


Рис. 2.1. Блок-схема експериментального приладу

Джерелом напруги служить блок живлення БП типу Б5-9. Прилад, який досліджується – це мікроамперметр М266 зі шкалою 50 мкА. Дільник напруги з резисторів $R_1 - R_2$ служить для зменшення напруги, прикладеної до мікроамперметра, до величини, необхідної для нормальної роботи цього приладу. Напруга на виході дільника U вимірюється вольтметром V . Для зміни струму I через мікроамперметр служить магазин опорів R типу Р33.

Внутрішній опір мікроамперметра обчислюється за наступною формулою:

$$R_i = \frac{U}{I} - R. \quad (2.1)$$

Порядок виконання роботи

1. Зібрати схему за рис. 2.1.
2. Встановити значення опору R , яке дорівнює 90 кОм.
3. Встановити перемикач вихідних напруг на блоці живлення БП у положення 10 В, ручку плавного регулювання вихідної напруги – в середнє положення.
4. Включити блок живлення і за допомогою ручок ступінчастого та плавного регулювання напруги встановити на виході дільника $R_1 - R_2$ одну з напруг $U = 1$ В; 0,3 В; 0,1 В; 0,05 В (вказується викладачем).
5. За допомогою магазину опорів R встановити значення струму через прилад в інтервалі 45...50 мкА.
6. Змінювати опір магазину R і при кожному його значенні вимірювати величину струму I через прилад. Значення опору і струму занести в колонки 2 і 3 табл. 2.1. Величини опору R змінювати так, щоб в табл. 2.1 було не менше 10 значень струму I в інтервалі від 5 до 50 мкА.

Таблиця 2.1

Вимірювання внутрішнього опору мікроамперметра М266

n	R , Ом	I , мкА	R_{in} , Ом	$(R_{in} - R_{i\text{cep}})^2$, Ом ²
1	2	3	4	5
1				
2				
3				
...				
9				
10				
$N =$			$\sum_{n=1}^N R_{in} =$	$\sum_{n=1}^N (R_{in} - R_{i\text{cep}})^2 =$

7. За формулою (2.1) обчислити внутрішній опір приладу $R_{i n}$ для кожного значення R . Занести його значення в колонку 4.

8. Знайти середнє значення внутрішнього опору приладу:

$$R_{i \text{сеп}} = \frac{\sum_{n=1}^N R_{i n}}{N}, \quad (2.2)$$

де N – кількість вимірювань. Значення $\sum_{n=1}^N R_{i n}$ взяти з колонки 4 табл.2.1.

9. Знайти середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (R_{i n} - R_{i \text{сеп}})^2}{N - 1}}. \quad (2.3)$$

Значення $\sum_{n=1}^N (R_{i n} - R_{i \text{сеп}})^2$ взяти з колонки 5 табл.2.1.

10. Обчислити абсолютну похибку вимірювань:

$$\Delta R_i = \frac{t(P; N - 1) \cdot S}{\sqrt{N}}, \quad (2.4)$$

де $t(P; N - 1)$ – коефіцієнт Стьюдента для довірчої ймовірності P і кількості вимірювань N (див. таблицю у додатку). Вважати $P = 0,95$.

11. Обчислити відносну похибку вимірювань $\frac{\Delta R_i}{R_{i \text{сеп}}}$.

12. Побудувати графік $R_{i n} = f(R)$. Провести на ньому пряму $R_{i \text{сеп}}$.

13. Провести горизонтальну вісь OR . Відкласти на ній значення $R_{i \text{сеп}}$ і границі довірчого інтервалу $R_{i \text{сеп}} - \Delta R_i < R_{i \text{сеп}} < R_{i \text{сеп}} + \Delta R_i$.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок-схему приладу;
- таблицю з результатами вимірювань;
- результат обчислень середнього значення R_i , його абсолютної та відносної похибок;

- графік $R_{i_n} = f(R)$;
- графічне зображення довірчого інтервалу вимірювань внутрішнього опору приладу.

Контрольні питання

1. Що таке внутрішній опір приладу?
2. Як включається в електричну схему амперметр? Яким має бути його внутрішній опір?
3. Як включається в електричну схему вольтметр? Яким має бути його внутрішній опір?
4. Сутність методу вимірювань внутрішнього опору мікроамперметра.
5. Що таке абсолютна похибка?
6. Що таке відносна похибка?
7. Що таке довірчий інтервал і довірна ймовірність?

Робота № 3**ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ
ВНУТРІШНЬОГО ОПОРУ МІКРОАМПЕРМЕТРА
МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ****Мета роботи**

Знайомство із застосуванням методу найменших квадратів (МНК) для обробки результатів на прикладі вимірювань внутрішнього опору мікроамперметра в роботі № 2. Оцінка похибки вимірювань.

Метод найменших квадратів

При аналізі експериментальних даних часто виникає необхідність опису отриманої залежності якою-небудь формулою (апроксимації залежності аналітичним виразом). Для розв'язання цієї задачі часто використовується метод найменших квадратів. Сутність методу полягає в наступному.

Нехай є експериментальні дані, що описують залежність фізичної величини Y від величини X .

n	X_n	Y_n
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
...
N	X_N	Y_N

Вона показана на рис. 3.1 точками. Необхідно знайти функцію $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, x)$, де m – кількість параметрів функції, яка найкращим чином описує цю залежність з урахуванням розкиду точок, спричиненого похибками експерименту. Найкращою функцією вважається така, для якої сума

$$S = \sum_{n=1}^N [f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, X_n) - Y_n]^2 \quad (3.1)$$

набуває мінімально можливого значення. З рис. 3.1 видно, що вираз у квадратних дужках – це відстань від точки на апроксимуючій кривій до експериментальної точки з тією ж абсцисою. Таким чином, найкращою кривою є така, у якої сума квадратів відстаней від неї до експериментальних точок є мінімальною. Мінімізація виразу (3.1) досягається вибором параметрів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Вид апроксимуючої функції визначається характером досліджуваного процесу або видом експериментальної залежності.

Деякі з функцій, що часто використовуються:

$$f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m,$$

$$f(a_0, a_1, x) = a_0e^{a_1x},$$

$$f(a_0, x) = \frac{a_0}{x}.$$

Формули визначення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ для різних апроксимуючих функцій наведено в посібниках з математичної статистики та математичної обробки результатів експерименту.

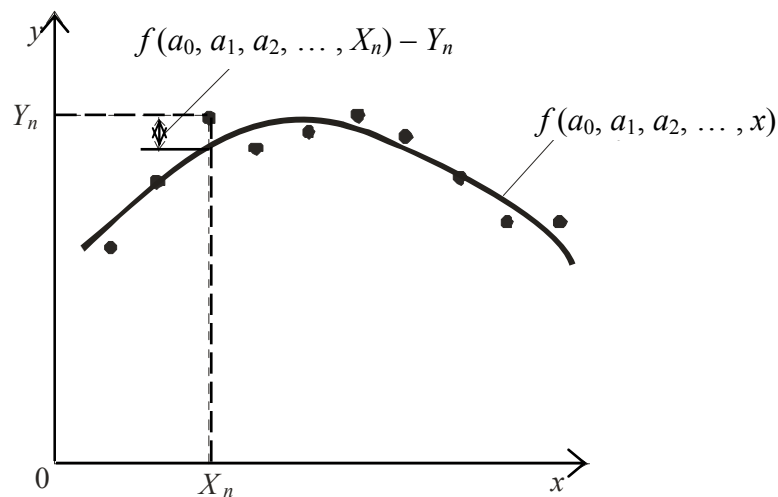


Рис. 3.1. До опису методу найменших квадратів

Простий, але такий, який часто зустрічається, є випадок лінійної залежності

$$y(x) = kx + b.$$

Слід підібрати такі значення параметрів k і b , щоб мінімальною була сума

$$S(k, b) = \sum_{n=1}^N [(kX_n + b) - Y_n]^2.$$

Необхідна для цього умова:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Використання його дає наступну систему рівнянь [4]:

$$\begin{cases} k \sum_{n=1}^N X_n^2 + b \sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^N X_n Y_n; \\ k \sum_{n=1}^N X_n + bN = \sum_{n=1}^N Y_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

За допомогою методу найменших квадратів можна також оцінити похибку визначення параметрів k і b [2]:

$$\Delta k = t(P; N - 2) S \sqrt{\frac{1}{\sum_{n=1}^N (X_n - X_{ср})^2}}. \quad (3.3)$$

$$\Delta b = t(P; N - 2) S \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N X_i^2}{N \sum_{n=1}^N (X_n - X_{ср})^2}},$$

де

$$X_{ср} = \frac{\sum_{n=1}^N X_n}{N}, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N [Y_n - (k X_n + b)]^2}{N - 2}}. \quad (3.5)$$

Обробка результатів вимірювань

В експерименті роботи № 2 є експериментальна залежність $I(R)$, яка описується рівнянням

$$I = \frac{U}{R + R_i}. \quad (3.6)$$

Позначення фізичних величин тут такі ж само, як у роботі № 2.

Ця залежність є нелінійною. Для використання викладеної вище теорії МНК її потрібно лінеаризувати, тобто отримати лінійну залежність певної величини від R . З рівняння (3.6) видно, що це буде для величини $1/I$:

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{U} R + \frac{R_i}{U}. \quad (3.7)$$

Параметри апроксимуючої прямої $y(x) = kx + b$ пов'язані з параметрами залежності (3.7) таким чином:

$$k = \frac{1}{U}, \quad b = \frac{R_i}{U}.$$

Параметри k і b можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (3.2). Після цього можна знайти значення внутрішнього опору приладу R_i і уточнене значення напруги U :

$$U = \frac{1}{k}, \quad R_i = bU = \frac{b}{k}. \tag{3.8}$$

Порядок виконання роботи

1. Використовуючи результати, отримані при виконанні роботи № 2, заповнити стовпці 2 і 3 табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Обробка результатів методом найменших квадратів

n	$R, \text{ Ом}$	$I, \text{ А}$	$1/I_n, 1/\text{А}$	$R_n^2, \text{ Ом}^2$	$R_n \cdot \frac{1}{I_n}, \text{ Ом/А}$
	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
...					
9					
10					
$N = 10$	$\sum R_n =$		$\sum 1/I_n =$	$\sum R_n^2 =$	$\sum R_n/I_n =$

2. Обчислити величини $1/I$ і заповнити стовпець 4 табл. 3.1.

3. Побудувати графік залежності $1/I = f(R)$. Отримані значення нанести на графік точками.

4. Вважаючи, що X_n – це R_n , а Y_n – це $1/I_n$, заповнити стовпці 4 і 5 табл. 3.1. Знайти суми, показані в останньому рядку табл. 3.1.

5. Скласти систему рівнянь (3.2) і, розв'язавши її, знайти параметри апроксимуючої прямої k і b . Провести на графіку пряму $f(R) = kR + b$. Вона має пройти через експериментальні точки.

6. За формулами (3.8) визначити значення напруги живлення U і внутрішнього опору приладу R_i . Значення напруги живлення повинно бути близьким до вимірної в експерименті напруги U .

7. За формулами (3.3) – (3.5) обчислити похибки визначення параметрів k і b апроксимуючої прямої, вважаючи, що X_n – це R_n , а Y_n – це $1/I_n$.

8. За формулою (3.9) (див. додаток) знайти абсолютну похибку ΔR_i визначення внутрішнього опору приладу.

9. Знайти відносну похибку визначення величини R_i :

$$\frac{\Delta R_i}{R_i}.$$

Оформлення роботи

У звіті повинні бути:

- таблиця необхідних для розрахунку експериментальних даних, отриманих при виконанні роботи № 2;
- система рівнянь (3.2) з коефіцієнтами, відповідними цим даним;
- хід розв'язку системи рівнянь (3.2) і отримані величини k і b ;
- обчислені за формулами (3.8) величини U і R_i ;
- хід обчислень за формулами (3.3)–(3.5) похибок Δk і Δb та їх значення при довірчій ймовірності $P = 0,95$:
- Значення абсолютної похибки ΔR_i і відносної похибки $\Delta R_i / R_i$;
- Порівняння величин R_i і ΔR_i , отриманих під час виконання робіт № 2 і № 3.

Контрольні питання

1. Сутність методу найменших квадратів.
2. Вивести формули (3.2) для визначення параметрів k і b апроксимуючої прямої.
3. У чому полягає метод лінеаризації експериментальної залежності (стосовно даних роботи № 2)?
4. Вивести співвідношення для абсолютної похибки ΔR_i .
5. Що таке довірчий інтервал і довірна ймовірність?
6. Який метод обробки даних дає більш точні результати? Чи узгоджуються ці результати між собою (чи перекриваються довірчі інтервали)?

Додаток

Похибка визначення внутрішнього опору приладу $R_i = b/k$ знаходиться за формулою для похибки результатів непрямих вимірювань:

$$\Delta R_i = \sqrt{\left(\frac{\partial R_i}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_i}{\partial k} \cdot \Delta k\right)^2}.$$

Обчисливши часткові похідні $\frac{\partial R_i}{\partial b}$ і $\frac{\partial R_i}{\partial k}$ і проробивши деякі математичні перетворення, отримаємо:

$$\Delta R_i = \frac{\sqrt{(k \cdot \Delta b)^2 + (b \cdot \Delta k)^2}}{k^2}. \quad (3.9)$$

Робота № 4

ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛОГРАФА

Мета роботи

Отримання навичок роботи з електронним осцилографом С1-83. Засвоєння методів вимірювань параметрів електричних сигналів [1, 12-15].

Електронний осцилограф

Електронний осцилограф – це прилад для візуального контролю електричних процесів і вимірювання амплітудних і часових параметрів сигналів, для вимірювання фазового зсуву між сигналами і частоти сигналів.

Основним вузлом осцилографа є електронно-променева трубка (рис. 4.1). Група електродів, що включає катод K з ниткою підігріву $НП$, сітку C і аноди A_1 та A_2 , утворює «електронну гармату», призначену для отримання вузького пучка електронів – електронного променя.

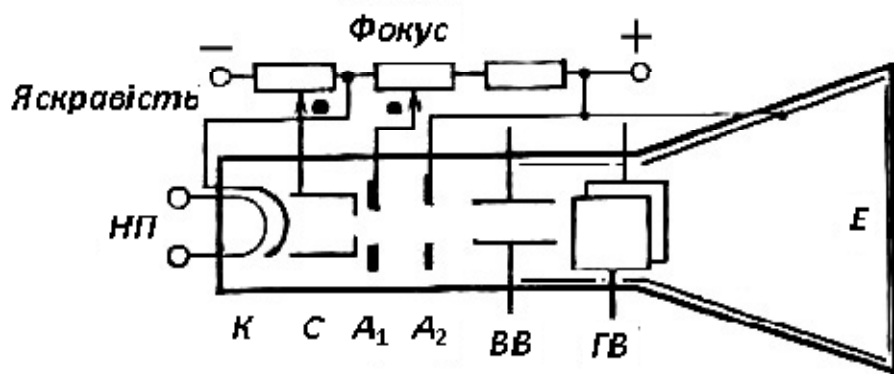


Рис. 4.1. Схема електронно-променевої трубки

Відхиляюча система складається з двох пар пластин – для вертикального відхилення ($ВВ$) і горизонтального відхилення ($ГВ$). Екран E трубки покривається люмінофором, що має здатність світитися під дією електронів, що вдаряють у нього.

Поверхня катода покрита речовиною, яка легко віддає електрони при нагріванні. На сітку, що має форму циліндра з отвором у торці, подається від'ємна щодо катода регульована напруга, за допомогою якої змінюється кількість електронів у промені і встановлюється яскравість плями на екрані. Це регулювання вноситься на передню панель осцилографа і забезпечується написом «Яскравість».

За допомогою системи анодів, на які подані позитивні щодо катода напруги, здійснюється розгін електронів до необхідної швидкості

та фокусування пучка електронів у точку на екрані трубки. Регулювання напруги на аноді A_1 також виноситься на передню панель осцилографа та забезпечується написом «Фокус».

Відхилення електронів, що летять між пластинами, відбувається під дією електричного поля, яке створюється підведеною до пластин напругою. Переміщення плями, яка світиться на екрані, визначається наближеним виразом

$$h = \frac{lLU}{d\varphi_{A_2}},$$

де L – відстань від середини пластини до екрану, d – відстань між пластинами, l – довжина пластин у напрямку руху електронів, φ_{A_2} – потенціал анода A_2 щодо катода.

Величина

$$S_U = \frac{h}{U} = \frac{lL}{d\varphi_{A_2}}$$

називається чутливістю трубки. В осцилографах загального призначення (універсальних осцилографах) вона складає 0,2 ... 0,5 мм/В, тому напруга, що подається на пластини, має становити 100 ... 200 В, щоб спричинити переміщення плями на екрані на 50 мм.

Внутрішня поверхня трубки покривається шаром графіту (акводагом) або металу, який з'єднується з анодом A_2 . Цей шар служить електростатичним екраном і захищає трубку від зовнішніх електричних полів. Для захисту від зовнішніх магнітних полів трубку поміщають у кожух з магнітом'якого матеріалу.

Для отримання зображення на екрані досліджуваний сигнал подається на вертикально відхиляючі пластини, а на горизонтально відхиляючі пластини подається напруга, яка лінійно зростає в часі (напруга розгортки).

Крім електронно-променевої трубки, в блок-схемі осцилографа (рис. 4.2) можна виділити наступні основні частини:

- 1) канал вертикального відхилення (канал Y), що включає дільник напруги $ДН$, підсилювач $П_Y$, лінію затримки $ЛЗ$;
- 2) канал горизонтального відхилення (канал X), що включає генератор розгортки $ГР$ і підсилювач $П_X$.

Необхідність введення підсилювачів $П_Y$ і $П_X$ пояснюється малою чутливістю трубки. В універсальних осцилографах використовуються, як правило, підсилювачі з пропускнуою здатністю від постійного струму до декількох мегагерц з великим (не менш 1 Мом) вхідним опором. Зміна

чутливості каналу Y проводиться за допомогою дільника напруг $ДН$ і плавного регулятора підсилення.

Канал X може працювати в двох режимах – розгортки і посилення сигналу, поданого на «Вхід X ». Режим роботи вибирається за допомогою перемикача $SA2$, положення 1 якого відповідає режиму розгортки, положення 2 – підсиленню сигналу. У режимі розгортки напруга генератора розгортки $ГР$ через підсилювач $П_X$ подається на горизонтально відхиляючі пластини.

Для отримання на екрані нерухомого зображення необхідно, щоб період розгортки дорівнював періоду досліджуваного сигналу або був кратний йому.

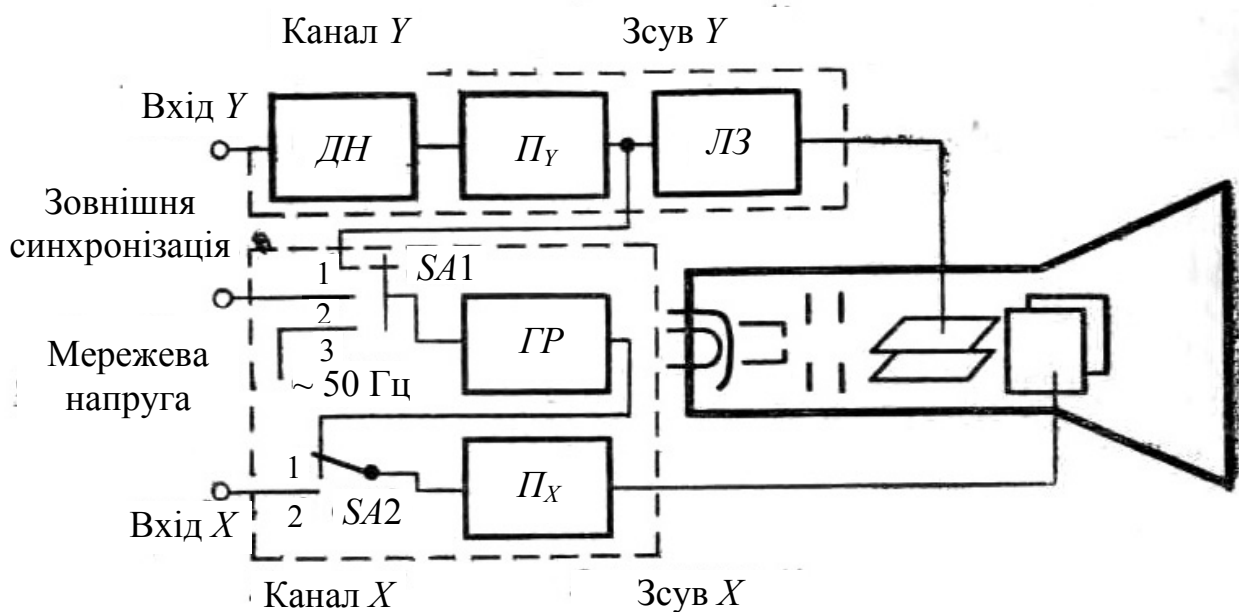


Рис. 4.2. Блок-схема електронного осцилографа

Для здійснення такої синхронізації в схему генератора $ГР$ вводиться синхронізуючий сигнал (сигнал запуску). Для цього використовується досліджуваний сигнал або зовнішній сигнал, частота якого дорівнює або є кратною частоті досліджуваного сигналу. Вибір синхронізуючого сигналу здійснюється перемикачем $SA1$, який розташований на передній панелі осцилографа і має напис «Синхронізація». Синхронізація роботи генератора розгортки досліджуваним сигналом (положення 1 перемикача $SA1$) називається внутрішньою. При зовнішній синхронізації (положення 2 перемикача $SA1$) сигнал, що синхронізує, подається на вхід «Зовнішня синхронізація». Для цього можливе також використання мережевої напруги (положення 3 перемикача $SA1$). Швидкість розгортки в універсальних осцилографах звичайно змінюється від 1 с/см до 10 нс/см.

Генератор розгортки має два режими роботи – безперервний і режим очікування. Режим безперервної розгортки використовується при дослідженні безперервних періодичних процесів або періодичної послідовності імпульсів, що мають малу скважність. У цьому випадку генератор розгортки працює в автоколебальному режимі, а синхронізуючий сигнал використовується для підтримки частоти генератора, яка дорівнює або є кратною частоті сигналу.

Режим очікування генератора розгортки використовується при дослідженні неперіодичних сигналів та імпульсів з великою скважністю або однократних імпульсів. У цьому випадку генератор знаходиться в стані очікування, а при надходженні досліджуваного або зовнішнього синхронізуючого імпульсу генерує тільки один період розгортки.

На рис. 4.3 наведено часові діаграми сигналів для цих двох режимів при внутрішній синхронізації.

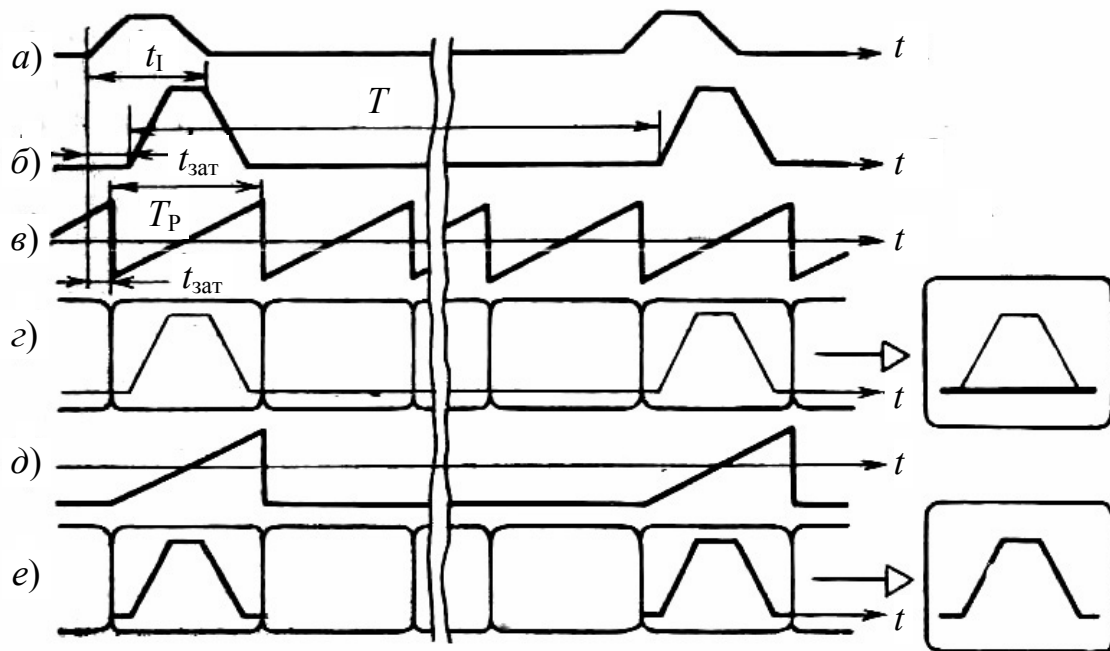


Рис. 4.3. Види розгортки:

а-г – безперервна розгортка, д-е – режим очікування

Досліджуваний сигнал (рис. 4.3а) підсилюється підсилювачем Π_Y , затримується лінією затримки (рис. 4.3б) і надходить на вертикально відхиляючі пластини. Затримка сигналу є необхідною, тому що напруга розгортки генерується з певною затримкою $t_{зат}$, у результаті чого початкова частина досліджуваного імпульсу на екрані може бути відсутньою. Затримка сигналу на час, більший, ніж $t_{зат}$, дозволяє отримати на екрані зображення початкової частини сигналу, оскільки в цьому випадку сигнал на пластини надходить після початку розгортки.

Для отримання зображення, що займає більшу частину екрана, необхідно, щоб тривалість розгортки T_p була дещо більше тривалості імпульсу t_i . Якщо скважність імпульсів є великою ($T/t_i \gg 1$), то при безперервному режимі роботи генератора розгортки (рис. 4.3в) зображення імпульсу буде блідим порівняно з горизонтальною лінією, яка прокреслюється багато разів за один період проходження імпульсів (на рис. 4.3г наведено послідовність кадрів, що створюють видиме зображення, показане в кінці діаграми).

При режимі очікування роботи генератора розгортки (рис. 4.3д) за рахунок збільшення яскравості можна домогтися якісного зображення досліджуваного імпульсу (на рис. 4.3е наведено послідовність кадрів і отримане на екрані зображення).

Вимірювання амплітуди сигналу і часових інтервалів

За осцилограмою досліджуваної напруги можна виміряти його параметри. Для імпульсних сигналів такими параметрами є амплітуда, тривалість, період повторень, тривалість фронту.

Амплітуда імпульсу може бути визначена за допомогою масштабної сітки на екрані осцилографа. Вимірюють відстань Y_m , відповідну піковому значенню сигналу, а потім обчислюють амплітуду імпульсу:

$$U_m = S_Y Y_m,$$

де S_Y – чутливість каналу Y .

Часові співвідношення визначаються інтервалами часу, в яких досліджуваний сигнал досягає певних заданих рівнів. Наприклад, при вимірюванні тривалості фронту імпульсу ці рівні можуть обиратися як 0,1 і 0,9 від амплітуди імпульсу U_m (рис. 4.4).

При швидкості розгортки осцилографа V_x [час/под] тривалість часового інтервалу між двома точками на екрані може бути обчислена за формулою

$$T_x = (X_2 - X_1) V_x,$$

де X_1 і X_2 – відстань на екрані між цими точками.

При вимірюваннях за допомогою осцилографа можливі дві групи похибок. Перша обумовлена неточним відтворенням на екрані форми досліджуваного сигналу, друга – похибками самих вимірювань на осцилограмі похибки першої групи виникають через нерівномірність амплітудно-частотної характеристики каналу Y та електронно-променевої трубки,

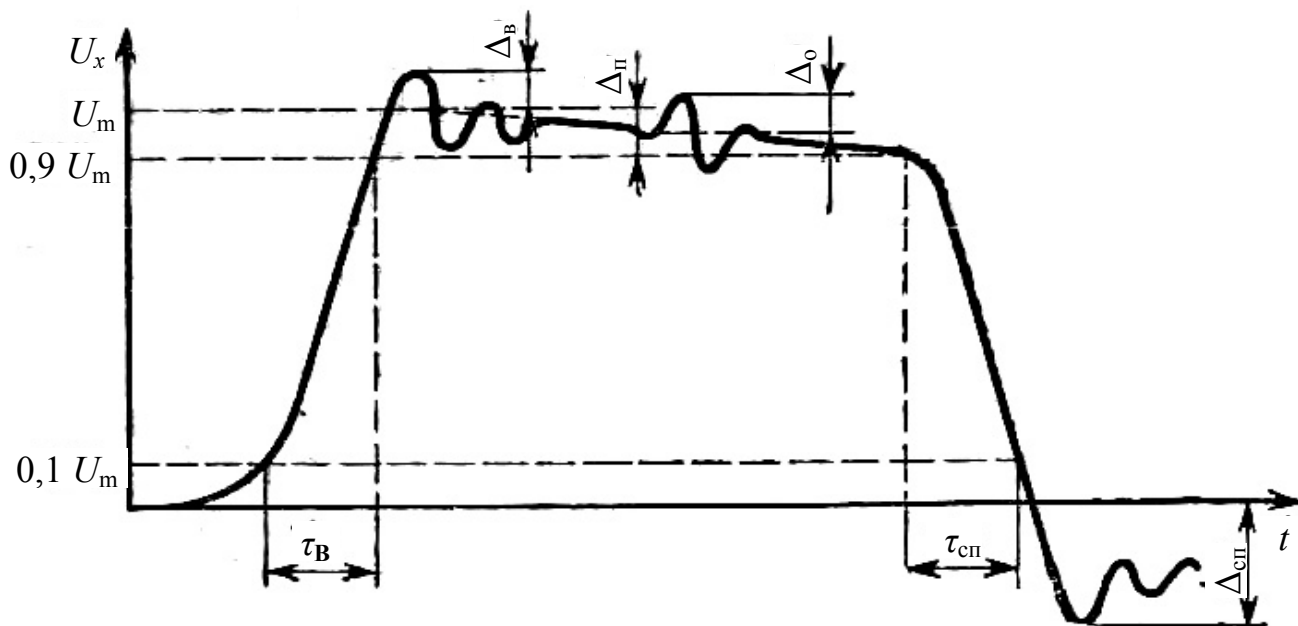


Рис. 4.4. Прямокутний імпульс на екрані осцилографа

нелінійність їх амплітудних характеристик, нелінійність розгортки. Ці похибки прийнято оцінювати за спотворенням осцилографом ідеального прямокутного імпульсу. Осцилограма такого імпульсу (рис. 4.4) характеризується наступними основними параметрами:

- часом встановлення τ_B ,
- тривалістю спаду $\tau_{сп}$,
- викидом на вершині Δ_B ,
- викидом на спаді $\Delta_{сп}$,
- спадом плоскої вершини $\Delta_{п}$,
- осциляціями на плоскій вершині Δ_o .

Час встановлення τ_B і тривалість спаду $\tau_{сп}$ визначаються верхньою граничною частотою f_B каналу Y осцилографа і електронно-променевої трубки:

$$\tau_B \approx \tau_{сп} \approx 0,4/f_B.$$

Якщо тривалість фронту досліджуваного імпульсу $\tau_{\phi} > 3\tau_B$, спотворення на осцилограмі будуть несуттєвими.

Спад плоскої вершини імпульсу $\delta U_{п} = \Delta_{п}/U_m$ залежить від його тривалості і нижньої граничної частоти f_H смуги пропускання каналу Y . Якщо $\delta U_{п} < 20\%$, можна користуватися співвідношенням

$$\delta U_{п} = 2 \pi f_H \tau_I,$$

де τ_I – тривалість імпульсу.

Викид Δ_v обумовлений перехідними процесами в підсилювачі. Його значення наводиться в паспортних даних осцилографа. Воно може бути від 10 % до 15 % від U_m при тривалості фронту вхідного імпульсу, набагато меншій від часу встановлення.

Осциляції на плоскій вершині імпульсу Δ_0 часто з'являються в ширококугових осцилографах із підсилювачами з розподіленими сталими при неповному узгодженні колекторної та емітерної ліній. Такий самий ефект виникає в стробоскопічних осцилографах через відбиття в лінії передачі від джерела сигналу до осцилографа.

Порядок виконання роботи

1. Підключити шнур живлення осцилографа до мережі 220 В 50 Гц.
2. Установити ручки «☀», «☉» у середнє положення, кнопковий перемикач роду роботи – у положення «I», перемикач «СИНХРОНИЗАЦІЯ» – у положення «внутр. I», перемикач «время/дел.» – в положення «1 mS». Увімкнути осцилограф. Після трихвилинного прогріву домогтися появи на екрані горизонтальної лінії. Ручкою «↕» каналу I поставити лінію розгортки на середину екрана. Ручками «☀» і «☉» встановити яскравість і чіткість зображення, зручні для спостереження.

3. Відкалібрувати чутливість каналу I та розгортку.

3.1. Для калібрування чутливості каналу I встановити перемикач «V/дел.» каналу I в положення «▼ 6 дел.». Ручку «▼» плавного регулювання підсилення каналу I повернути праворуч до упору і клацання. Перемикач «┌┐» на лівій стінці осцилографа поставте в положення «┌┐». При цьому вертикальний розмір сигналу на екрані має дорівнювати 6 поділкам. Якщо величина зображення сигналу не дорівнює 6 поділкам, то потенціометром «▼», виведеним під шліц на передню панель, встановити величину зображення по вертикалі, яка дорівнює 6 поділкам.

3.2. Калібрування чутливості каналу II проводити в положенні «II» кнопкового перемикача роду роботи аналогічно п. 3.1 за допомогою ручки потенціометра «▼», що відноситься до каналу II, виведеного на передню панель під шліц.

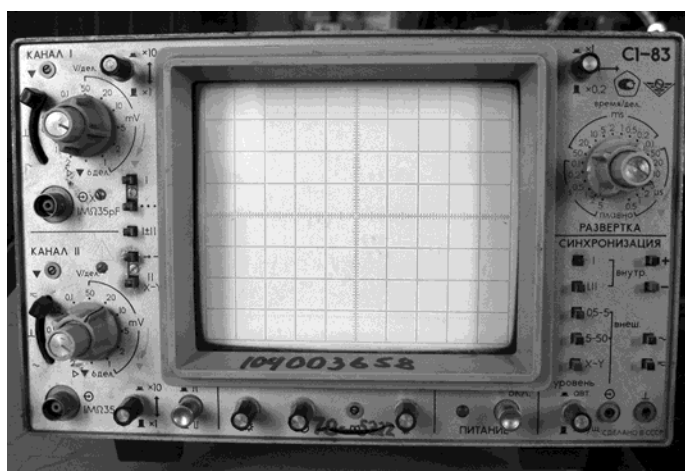


Рис. 4.5. Передня панель осцилографа С1-83

3.3. Для калібрування розгортки встановити перемикач каналу в положення I « ∇ 6 дел.». Перемикач швидкості розгортки встановити у положення «1 mS». Ручку, поєднану з перемикачем розгортки, повернути праворуч до упору і клацання. Кнопковий перемикач роду роботи підсилювача перевести у положення «I». Встановити на екрані стійке зображення. За допомогою ручки « \leftrightarrow » сумістити один з фронтів імпульсу на початковій ділянці розгортки із першою вертикальною лінією сітки на екрані. Відрахувати 10 періодів сигналу калібратора і потенціометром « $\nabla \times 1$ » на правій стінці приладу, домогтися, щоб початок десятого періоду збігався з десятою вертикальною лінією сітки на екрані. Перемикач синхронізації повинен бути в положенні «Внутр. I, II».

Установити перемикач « $\times 1, \times 0,2$ », поєднаний з ручкою « \leftrightarrow », в положення « $\times 0,2$ ». Встановити перемикач розгортки в положення «5 mS». За допомогою потенціометра « $\nabla \times 0,2$ » на правій стінці приладу домогтися, щоб 10 періодів сигналу збігалося з 10 горизонтальними поділками сітки екрану.

4. Підключити сигнальний кабель каналу I осцилографа до виходу генератора синусоїдального сигналу. Увімкнути генератор і встановити на ньому задані в табл. 3.1 та 3.2 значення напруги та частоти. Отримати на екрані осцилографа стійке зображення 2–3 періодів сигналу. Для цього слід зробити наступне.

- Подати сигнал на гніздо « \ominus 1 M Ω 35 pF» каналу I.
- Встановити перемикач режиму роботи підсилювача в положення «I».
- Поставити перемикачі «V/дел.» і « $\times 1, \times 10$ » каналу I в таке положення, щоб розмір зображення становив більше половини розміру вертикальної шкали екрану.
- Поставити перемикач « $\simeq \perp \sim$ » у положення « \sim ».
- Ручкою «уровень» встановити стійке зображення. Перемикач п. . нізмці повинен бути в положенні «внутр. I». Поставити перемикач «время/дел.» в положення, при якому спостерігається 2–3 періоди досліджуваного сигналу.

5. Виміряти за допомогою осцилографа напругу генератора синусоїдальних коливань і отримані дані помістити у табл. 4.1. Для цього слід зробити наступне.

- Виконати п. 3.
- Установити ручку « \updownarrow » вертикального зсуву каналу I так, щоб мінімальний рівень сигналу збігався з однією з нижніх ліній, а максимальний – знаходився в межах екрану. Ручкою « \leftrightarrow » горизонтального переміщення змістити зображення таким чином, щоб один з верхніх піків знаходився на середній вертикальній лінії сітки.

- Виміряти відстань у поділках між нижньою і верхньою точками сигналу. Ручка « ∇ » плавного регулювання підсилення має бути встановлена праворуч до упору.

- Помножити вимірянну відстань на показання перемикачів «V/дел.» і « $\times 1$, $\times 10$ ». Амплітудне значення сигналу U_{\max} дорівнює половині отриманого результату. Записати значення U_{\max} в табл. 4.1.

6. Порівняти результат з показаннями вольтметра. Обчислити абсолютну ΔU_x і відносну δU_x похибки результату.

7. Виміряти за допомогою осцилографа частоту синусоїдальних коливань генератора і отримані дані помістити в табл. 4.2. Для цього слід зробити наступне.

- Подати досліджуваний сигнал на гніздо « \ominus 1 М Ω 35 pF» каналу I.

- Встановити перемикач «V/дел.» у таке положення, щоб зображення на екрані по вертикалі становило 5–7 поділок.

- Встановити перемикач «время/дел.» в таке положення, при якому відстань по горизонталі між точками, віддаленими одна від одної на 1 період, була не менше 10 поділок.

- Встановити ручкою «уровень» стійке зображення на екрані.

- Перемістити ручкою « \updownarrow » каналу I зображення так, щоб точки, між якими вимірюється відстань, перебували на горизонтальній центральній лінії сітки.

- Виміряти відстань між точками, віддаленими одна від одної на 1 період.

- Помножити вимірянну відстань на значення швидкості розгортки і положення перемикача « $\times 1$, $\times 0,2$ ». Результат T_x записати в табл. 4.2.

- Розрахувати частоту сигналу F_x за формулою

$$F_x = \frac{1}{T_x}.$$

8. Порівняти результат з показаннями шкали генератора. Обчислити абсолютну ΔF_x і відносну δF_x похибки результату.

Увага! Для кнопкових перемикачів є неприпустимим одночасне натискання двох або більше кнопок.

Таблиця 4.1

Вимірювання напруги

Параметр сигналу	Значення напруги U_{Γ} , В						
	0,5	1	3	4	5	6	7
U_{\max} , В							
$U_{ef} = U_{\max}/\sqrt{2}$, В							
$\Delta U_x = U_{ef} - U_{z}$, В							
δU_x , %							

Таблиця 4.2

Вимірювання частоти сигналу та періоду коливань

Параметр сигналу	Значення частоти коливань, F_z , кГц						
	0,3	0,5	2	5	10	15	20
T_x , мс							
$F_x = \frac{1}{T_x}$, кГц							
$\Delta F_x = F_x - F_z$, Гц							
δF_x , %							

Оформлення роботи

У звіті повинні бути:

- таблиця результатів вимірювань постійної та змінної напруги;
- таблиця результатів вимірювань частоти коливань та періоду;

Контрольні питання

1. Призначення електронного осцилографа.
2. Будова електронно-променевої трубки.
3. Блок-схема електронного осцилографа.
4. Робота безперервної розгортки та розгортки в режимі очікування.
5. Спотворення, внесені осцилографом, у форму досліджуваного імпульсу.
6. Вимірювання за допомогою осцилографа напруги сигналу.
7. Вимірювання за допомогою осцилографа часових інтервалів.
8. Перерахуйте джерела похибок при вимірюванні осцилографом напруги і часових інтервалів.

Робота № 5**ВИМІРЮВАННЯ ПОСТІЙНИХ І ЗМІННИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ СИГНАЛІВ****Мета роботи**

Вимірювання постійної напруги та параметрів змінних сигналів цифровим вольтметром і осцилографом [1, 12, 13].

Параметри змінних сигналів

Сигнали, що змінюються в часі, (рис. 5.1) характеризуються такими параметрами:

- 1) миттєве значення $u(t)$;
- 2) максимальне (пікове) значення U_{\max} . Якщо сигнал несиметричний щодо осі $0x$, використовуються два значення $-U_{\max+}$ і $U_{\max-}$ (рис. 5.1а);
- 3) середнє значення

$$U_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (5.1)$$

де T – період сигналу (рис. 5.1а) або час вимірювання неперіодичного сигналу (рис. 5.1б);

- 4) ефективне значення

$$U_{\text{еф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u(t)]^2 dt}. \quad (5.2)$$

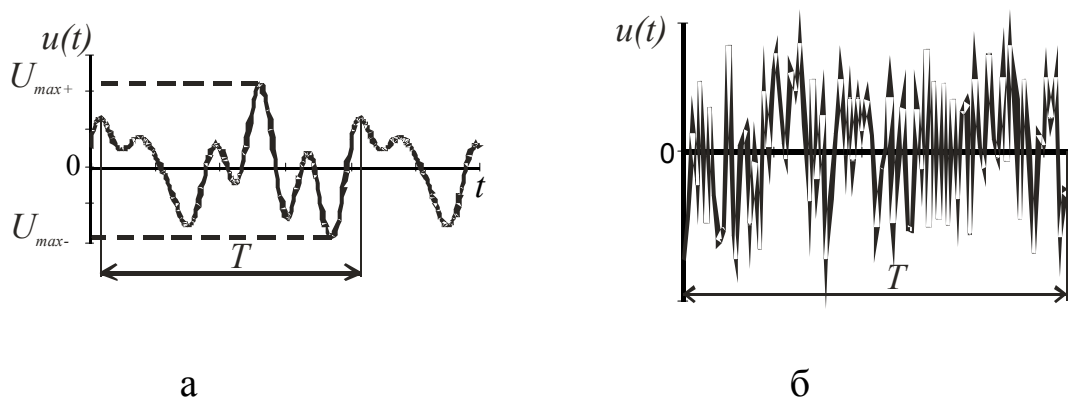


Рис. 5.1. Змінні сигнали

Порядок виконання роботи

1. Вимірювання постійного сигналу.

1.1. Зібрати схему для вимірювання напруги сухого елемента (рис 5.2).

1.2. Цифровий вольтметр В7-27 поставити в режим вимірювання постійної напруги.

1.3. Встановити перемикач режиму роботи осцилографа С1-83 у положення «Відкритий вхід» (\approx).

1.4. Лінію розгортки осцилографа за відсутності вхідного сигналу встановити в нижній частині екрану.

1.5. Вибрати таку полярність сигналу від сухого елемента, щоб при його подачі на Y-вхід осцилографа лінія розгортки відхилялася вгору.

1.6. Вибрати таке положення перемикача чутливості осцилографа, щоб лінія розгортки при подачі сигналу відхилялася на більшу частину екрану.

1.7. Виміряти відхилення лінії розгортки (в сантиметрах) і визначити напругу джерела постійної напруги, використовуючи встановлені значення чутливості осцилографа. Записати результати вимірювань.

1.8. Виміряти напругу сухого елемента цифровим вольтметром. Записати результат.

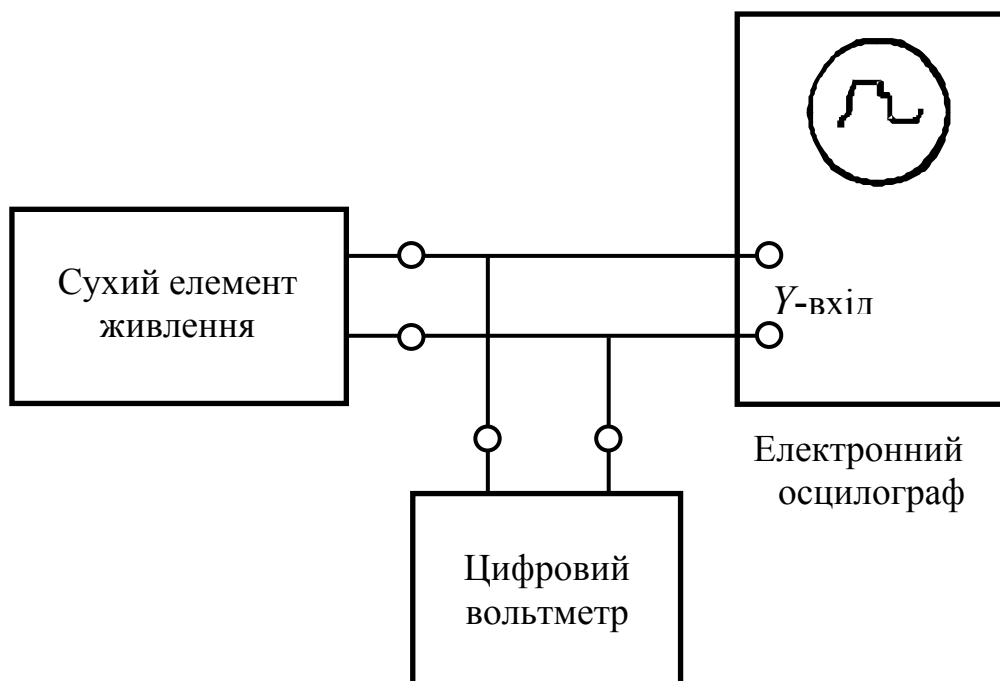


Рис. 5.2. Вимірювання постійної напруги

1.9. Оцінити абсолютну і відносну похибки вимірювання напруги осцилографом за формулами (5.3) і (5.4), вважаючи цифровий вольтметр зразковим приладом.

1.10. Оцінити похибку вимірювання напруги осцилографом як результат непрямих вимірювань за формулою (5.6). Визначити, чи існує систематична похибка вимірювань.

2. Вимірювання змінних сигналів.

2.1. Зібрати схему для вимірювання параметрів змінних електричних сигналів (рис. 5.3). При з'єднанні кабелів звернути увагу на правильне з'єднання сигнальних і земляних виводів.

2.2. Цифровий вольтметр поставити в режим вимірів змінної напруги.

2.3. Перемикач режимів роботи осцилографа встановити в положення «Відкритий вхід» (=).

2.4. На генераторі Г6-28 встановити вид сигналу 1 (рис. 5.4).

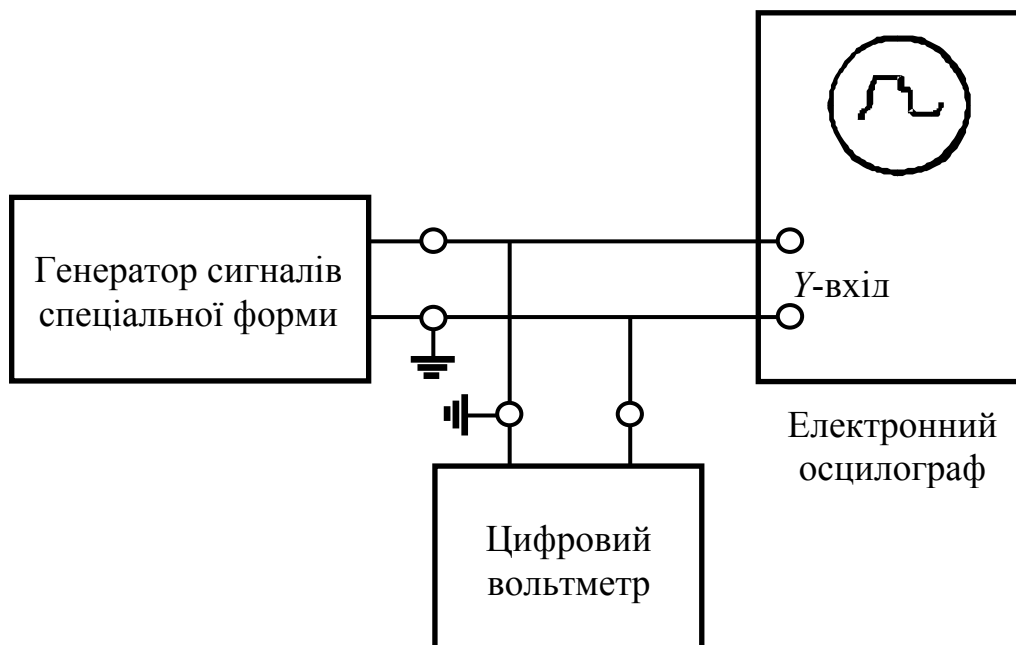


Рис. 5.3. Вимірювання змінних сигналів

Сигнал 1

$$u(t) = U_{max} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

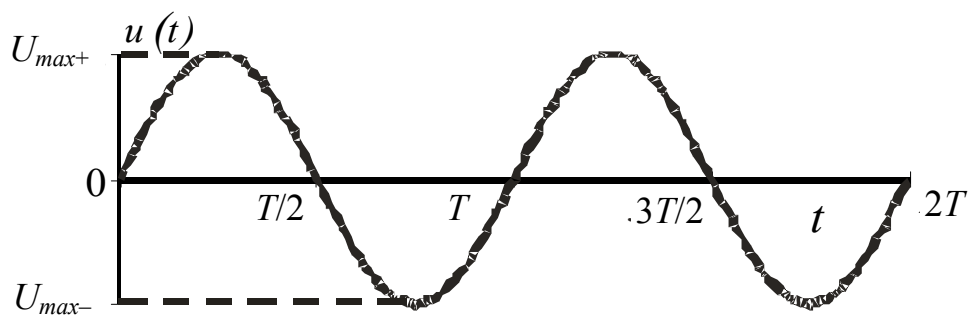


Рис. 5.4. Синусоїдальний сигнал

2.5. Встановити таку амплітуду сигналу генератора і таку чутливість осцилографа, щоб сигнал займав більшу частину екрана по вертикалі.

2.6. Встановити швидкість розгортки осцилографа, за якої на екрані видно кілька періодів сигналу. Ручкою регулювання «Рівень» осцилографа встановити стабільну картину на екрані.

2.7. За картиною на екрані визначити період сигналу. Перевірити, чи відповідає він частоті генератора. Записати значення періоду і частоти.

2.8. Виміряти за допомогою осцилографа амплітуду сигналу U_{max} . Записати результат у таблицю.

2.9. Виміряти напругу сигналу цифровим вольтметром. Записати результат у таблицю.

2.10. Повторити вимірювання за пп. 2.8 і 2.9 для сигналів 2, 3 і 4 генератора (рис. 5.5, 5.6 та 5.7). Записати результати в таблицю.

2.11. Обчислити ефективні значення напруги сигналів 1, 2, 3 і 4 на екрані осцилографа за формулою (5.2). Результати записати в таблицю. Перевірити їх відповідність значенням, виміряним вольтметром з урахуванням похибки вимірювань за допомогою осцилографа. Похибку вважати такою ж, як і при вимірюванні постійного сигналу.

Таблиця 5.1

Вимірювання сигналів генератора Г6-28

№	Вид сигналу	Осцилограф		Вольтметр	$ U_{\text{еф.осц}} - U_{\text{еф.в}}, \text{ В}$
		$U_{\text{max}}, \text{ В}$	$U_{\text{еф.осц}}, \text{ В}$	$U_{\text{еф.в}}, \text{ В}$	
1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
4					

Сигнал 2

$$u(t) = \begin{cases} 4U_{\text{max}} \frac{t}{T} \text{ при } 0 < t \leq \frac{T}{4} \\ 2U_{\text{max}} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \text{ при } \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \\ 4U_{\text{max}} \left(\frac{t}{T} - 1\right) \text{ при } \frac{3T}{4} < t \leq T \end{cases}$$

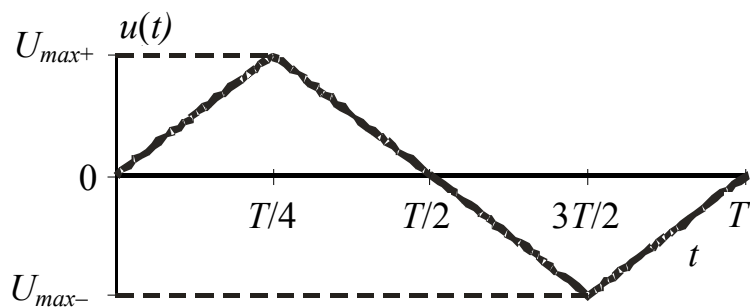


Рис. 5.5. Симетричний пилоподібний сигнал

Сигнал 3

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{при } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -U_{\max} & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

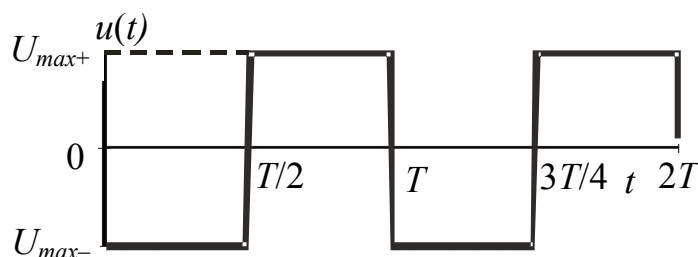


Рис. 5.6. Сигнал «меандр»

Сигнал 4

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ U_{\max} \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

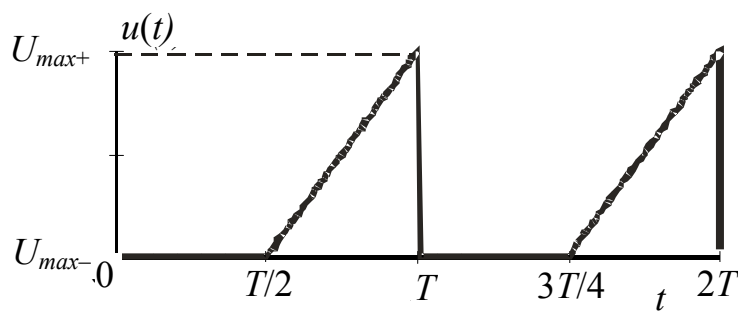


Рис. 5.7. Несиметричний пилоподібний сигнал

3. Похибки вимірювань.

Абсолютна похибка:

$$\Delta U = U - U_0, \quad (5.3)$$

де U – результат вимірювання напруги осцилографом, U_0 – результат вимірювання напруги зразковим приладом.

Відносна похибка:

$$\frac{\Delta U}{U_0}. \quad (5.4)$$

Похибка вимірювання функції $g = g(x, y, \dots, v)$ – похибка непрямих вимірювань:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial v} \Delta v\right)^2} \dots \quad (5.5)$$

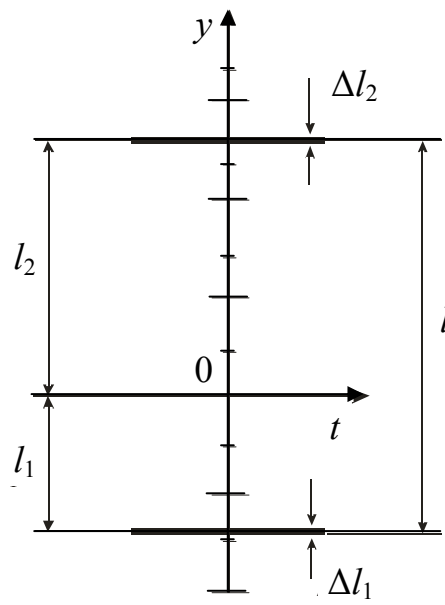


Рис. 5.8. До розрахунку похибки вимірювання напруги осцилографом:
 l_1 – положення лінії розгортки за відсутності сигналу,
 l_2 – положення лінії розгортки за наявності сигналу,
 $\Delta l_1, \Delta l_2$ – товщина лінії розгортки

Відхилення лінії розгортки при включенні сигналу: $l = l_2 - l_1$.
 Напруга: $U = S l$, де S – чутливість осцилографа, В/см.

Відповідно до формули (5.5):

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial l_1} \cdot \Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial l_2} \cdot \Delta l_2\right)^2} = \sqrt{(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2}. \quad (5.6)$$

$\Delta U = S \cdot \Delta l$ – абсолютна похибка,

$\frac{\Delta U}{U}$ – відносна похибка.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок-схеми приладів;
- результати вимірювань постійної напруги;
- результати вимірювань амплітуди змінного сигналу;
- результати вимірювань періоду змінного сигналу;
- значення частоти сигналу генератора і обчислене за нею значення періоду сигналу;
- хід обчислень ефективних значень сигналів 1, 2, 3 і 4;
- хід обчислень похибки вимірювань напруги осцилографом.

Контрольні питання

1. Що таке період сигналу, частота сигналу? Як пов'язані між собою ці величини?
2. Що таке максимальне значення (амплітуда) сигналу?
3. Формула для обчислення ефективного значення сигналу.
4. Що таке абсолютна похибка?
5. Що таке відносна похибка?

Робота № 6**ВИМІРЮВАННЯ РІЗНИЦІ
ФАЗ СИГНАЛІВ****Мета роботи**

Вимірювання різниці фаз двох синусоїдальних сигналів осцилографічними методами [1, 12, 14].

**Осцилографічні методи
вимірювання різниці фаз**

Різниця фаз двох синусоїдальних сигналів $u_1 = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ та $u_2 = U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ – це різниця їхніх аргументів:

$$\varphi = (\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2) = (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2).$$

При $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ різниця фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ від часу не залежить.

Позначимо через t_1 і t_2 моменти часу, коли обидва сигнали мають однакову фазу (рис. 6.1). Тоді

$$\begin{aligned} \omega t_1 + \varphi_1 &= \omega t_2 + \varphi_2, \\ \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi(t_2 - t_1)}{T}, \end{aligned}$$

або в градусній мірі, позначивши $T_1 = t_2 - t_1$, отримаємо:

$$\varphi^\circ = 360^\circ \cdot \frac{T_1}{T}. \quad (6.1)$$

Сенс величин T_1 і T можна зрозуміти з рис. 6.1.

Інший метод вимірювання різниці фаз між двома синусоїдальними сигналами ґрунтується на спостереженні на екрані осцилографа фігур Ліссажу. Для цього один сигнал $u_1 = U_1 \cos \omega t$ подається на горизонтально відхиляючі пластини, а другий сигнал $u_2 = U_2 \cos(\omega t + \varphi)$ – на вертикально відхиляючі пластини. Рівняння руху точки на екрані по горизонталі і вертикалі будуть такими:

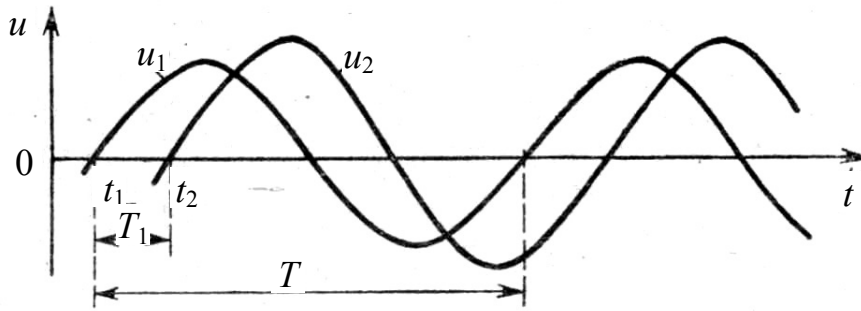


Рис. 6.1. Сигнали з різними фазами

$$x = x_{\max} \cos \omega t,$$

$$y = y_{\max} \cos(\omega t + \varphi).$$

Виключаючи з цих рівнянь час t , знайдемо траєкторію руху точки:

$$y = y_{\max} \left[\frac{x}{x_{\max}} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^2} \sin \varphi \right]. \quad (6.2)$$

Рівняння (6.2) описує еліпс з осями, нахиленими до координат x і y (рис. 6.2). Його вигляд визначається різницею фаз між сигналами u_1 і u_2 .

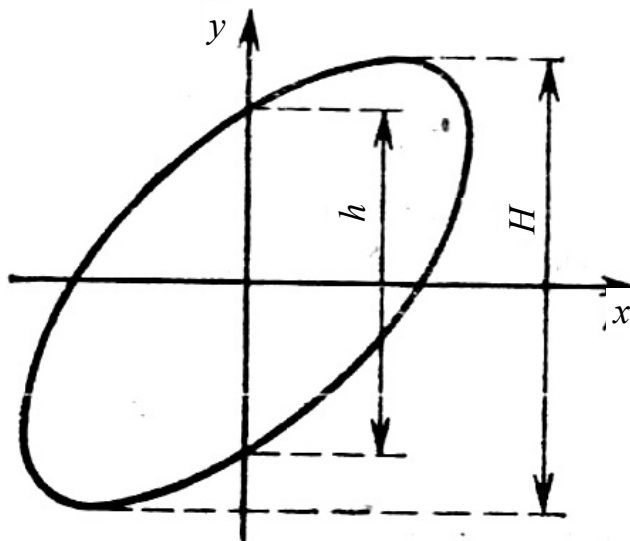


Рис. 6.2. Фігура Ліссажу

З рівняння (6.2) видно, що при $x = 0$

$$y = \pm y_{\max} \sin \varphi = \pm \frac{h}{2}, \quad (6.3)$$

де h – ординати точок перетину еліпса з вертикальною віссю,

$$y_{\max} = \pm \frac{H}{2}, \quad (6.4)$$

де H – максимальне відхилення по осі ординат.

Поділивши (6.3) на (6.4), отримаємо

$$\sin \varphi = \frac{h}{H},$$

або

$$\varphi = \arcsin \frac{h}{H}. \quad (6.5)$$

Похибки вимірювань обома методами становлять 5–10 % і складаються з випадкових і систематичних похибок. Випадкові похибки виникають через неточності вимірювання відрізків T_1 , T , h і H на екрані осцилографа. Систематичні похибки виникають з таких причин.

1. Зсуви фаз сигналів у каналах осцилографа дещо відрізняються один від одного.

2. Взаємні наведення сигналів змінюють їх фази.

3. Нелінійності підсилювачів у каналах горизонтального та вертикального відхилень приводять до зсувів фаз сигналів.

Фазозсувні RC-ланцюги

У лабораторній практиці застосовуються пристрої, що дозволяють плавно змінювати величину фазового зсуву між сигналами.

Схема простого фазозсувного RC-ланцюга № 1 показана на рис. 6.3. Струм у ній дорівнює

$$i = \frac{U_{\text{вх}}}{R - jX_c}, \quad \text{де} \quad X_c = \frac{1}{\omega c}.$$

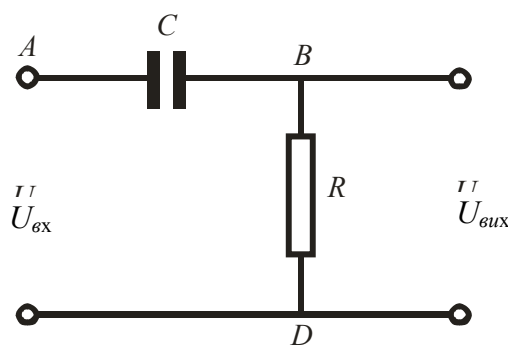


Рис. 6.3. Фазозсувний ланцюг № 1

Вихідна напруга буде такою:

$$U_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}} = iR = U_{\hat{a}\hat{o}} \frac{R}{R - jX_c}$$

Проробивши деякі перетворення та записавши результат у показовій формі, отримаємо:

$$U_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} e^{i\varphi},$$

де

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\omega RC}. \tag{6.6}$$

Векторну діаграму напруг у такому ланцюзі показано на рис. 6.4.

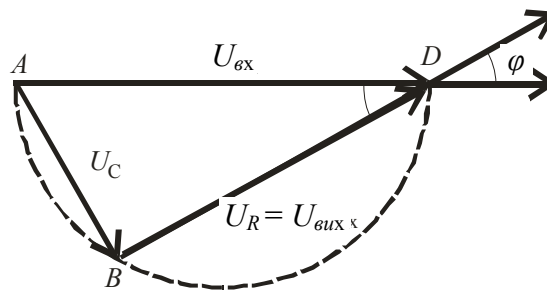


Рис. 6.4. Векторна діаграма фазозсувного ланцюга № 1

Напруга U_c між точками A і B відстає на кут 90° від напруги U_R між точками B і D . Вихідна напруга випереджає вхідну напругу на кут φ . З геометричних побудов видно, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|U_c|}{|U_R|} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{R} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Цей вираз узгоджується з виразом (6.6), який отримано іншим способом.

Схему іншого простого фазозсувного ланцюга (ланцюг № 2) показано на рис. 6.5.

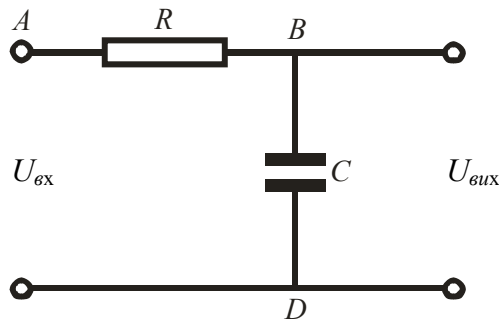


Рис. 6.5. Фазозсувний ланцюг № 2

Струм у ній дорівнює

$$i = \frac{U_{\text{вх}}}{R - jX_c}, \text{ де } X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

Вихідна напруга:

$$U_{\text{вих}} = i(-jX_c) = U_{\text{вх}} \frac{-jX_c}{R - jX_c}.$$

У показниковій формі ця формула виглядає так:

$$U_{\text{вих}} = \frac{U_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j\varphi},$$

де

$$\varphi = \text{arctg}(\omega RC). \tag{6.7}$$

Це видно також на векторній діаграмі (рис. 6.6). З неї випливає, що

$$\text{tg } \varphi = \frac{|U_R|}{|U_C|} = \frac{R}{1/\omega C} = \omega RC.$$

У цій схемі вихідна напруга відстає за фазою від вхідної напруги.

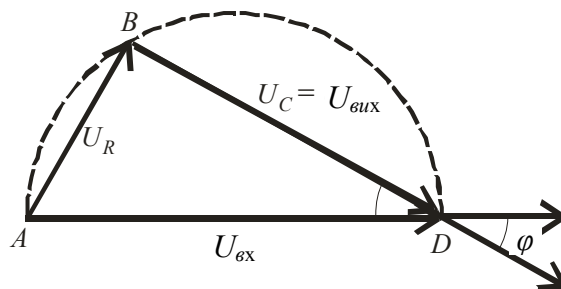


Рис. 6.6. Векторна діаграма фазозсувного ланцюга № 2

Порядок виконання роботи

Частина 1

1.1. Зібрати схему, показану на рис. 6.7. Включити в неї *RC*-ланцюг № 1 з параметрами $R = 24 \text{ кОм}$, $C = 0,05 \text{ мкФ}$.

1.2. За відсутності сигналів виставити лінії розгортки каналів 1 і 2 уздовж середньої горизонтальної лінії сітки екрана осцилографа.

1.3. Встановити частоту генератора 20 Гц. Подати сигнали на осцилограф.

1.4. Ручкою регулювання «Рівень» на передній панелі осцилографа встановити стабільну картину на екрані.

1.5. Регулюючи посилення каналів 1 і 2 осцилографа і переміщаючи зображення по вертикалі, встановити однакові амплітуди сигналів каналів 1 і 2 та поєднати їх нульові лінії.

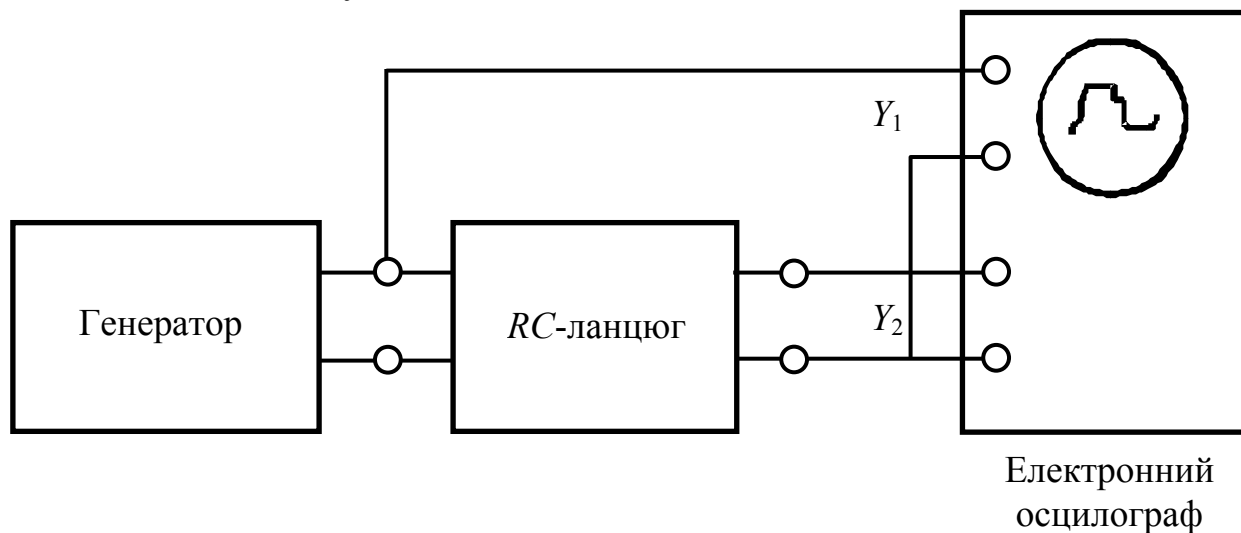


Рис. 6.7. Вимірювання різниці фаз двоканальним осцилографом

1.6. Виміряти відстані T_1 і T , які входять у формулу (6.1). Результати записати в колонки 2 і 3 табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Вимірювання різниці фаз сигналів двоканальним осцилографом (схема 1)

f , Гц	T_1 , мм	T , мм	$\varphi_{експ}$, °	$\varphi_{теор}$, °
1	2	3	4	5
20				
40				
60				
...				
200				

1.7. Повторити вимірювання в діапазоні частот від 20 Гц до 200 Гц із кроком 20 Гц. Результати записати в колонки 2 і 3 табл. 6.1.

1.8. Обчислити зсув фаз $\varphi_{експ}$ між сигналами на вході та виході RC -ланцюга за формулою (6.1). Результати записати в колонку 4 табл. 6.1.

1.9. Обчислити за формулою (6.6) теоретичні значення зсуву фаз $\varphi_{теор}$ для тих же частот. Результати записати в колонку 5 табл. 6.1.

1.10. Побудувати графіки залежності $\varphi_{\delta \dot{a}i \delta}(f)$ і $\varphi_{e\ddot{e}i\ddot{i}}(f)$. Теоретичну залежність показати суцільною лінією, експериментальну – великими точками, не з'єднаними лініями між собою.

1.11. Включити в схему рис. 6.7 RC -ланцюг № 2 з параметрами $R = 24$ кОм, $C = 0,05$ мкФ.

1.12. Провести вимірювання різниці фаз у діапазоні частот від 20 Гц до 200 Гц із кроком 20 Гц. Результати записати в колонки 2 і 3 табл. 6.2. Обчислити зсув фаз $\varphi_{експ}$ між сигналами на вході й виході RC -ланцюга за формулою (6.1). Результати записати в колонку 4 табл. 6.1.

Таблиця 6.2

Вимірювання різниці фаз сигналів
двоканальним осцилографом (схема 2)

$f, \text{Гц}$	$T_1, \text{мм}$	$T, \text{мм}$	$\varphi_{експ}, ^\circ$	$\varphi_{теор}, ^\circ$
1	2	3	4	5
20				
40				
60				
...				
200				

1.13. Обчислити за формулою (6.7) теоретичні значення зсуву фаз $\varphi_{експ}$ для цих частот. Результати записати в колонку 5 табл. 6.2.

1.14. Побудувати графіки залежності $\varphi_{\delta \dot{a}i \delta}(\varphi)$ і $\varphi_{e\ddot{e}i\ddot{i}}(\varphi)$ згідно з вказівками п. 1.10.

Частина 2

2.1. Зібрати схему, показану на рис. 6.8. Включити RC -ланцюг № 1 з параметрами $R = 24$ кОм, $C = 0,05$ мкФ.

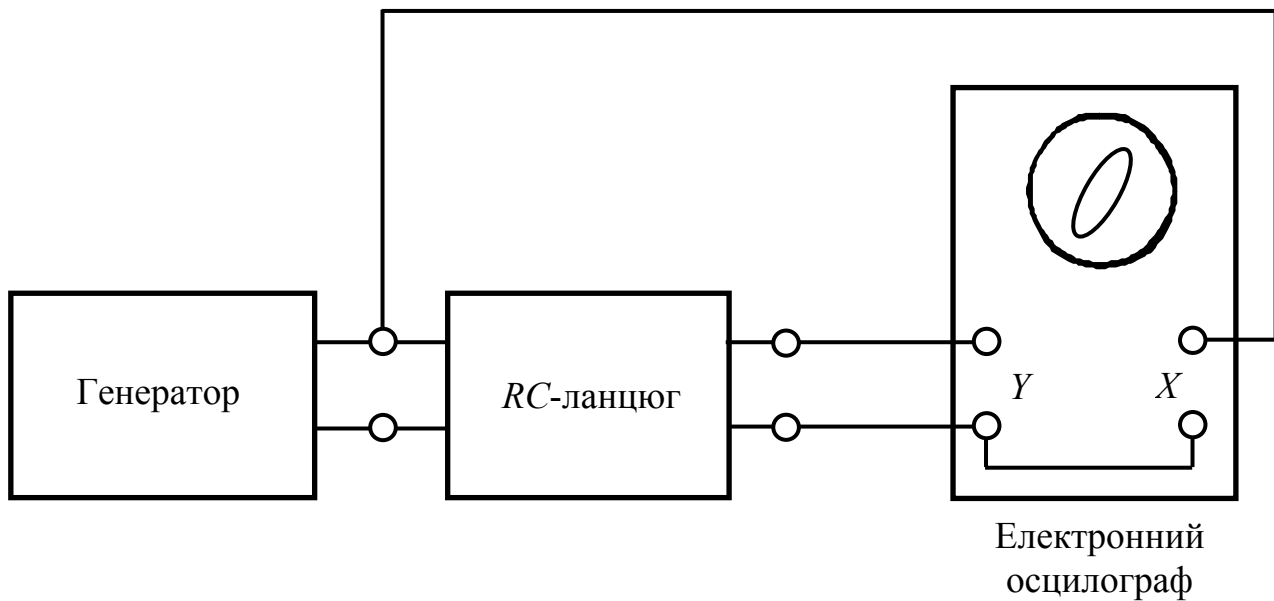


Рис. 6.8. Вимірювання різниці фаз методом фігур Ліссажу

2.2. Встановити частоту генератора 20 Гц.

2.3. Регулюванням амплітуди вихідного сигналу генератора встановити відхилення сигналу по горизонталі на більшу частину екрана осцилографа. Встановити сигнал симетрично щодо середньої вертикальної лінії сітки екрана, для чого використовувати ручку зсуву зображення по горизонталі.

2.4. Регулюваннями чутливості Y-каналу і зміщення по вертикалі встановити зображення еліпса симетрично щодо середньої горизонтальної лінії сітки екрана.

2.5. Виміряти на екрані осцилографа розміри h і H (рис. 6.2) по вертикалі. Результати записати в колонки 2 і 3 табл. 6.3.

2.6. Повторити вимірювання в діапазоні частот від 20 Гц до 200 Гц із кроком 20 Гц.

Таблиця 6.3

Вимірювання різниці фаз сигналів методом фігур Ліссажу (схема 1)

f , Гц	h , мм	H , мм	$\varphi_{\text{експ}}$, °	$\varphi_{\text{теор}}$, °
1	2	3	4	5
20				
40				
60				
...				
200				

2.7. За формулою (6.5) обчислити зсув фаз $\varphi_{експ}$ між сигналами на вході і виході RC -ланцюга. Результати записати в колонку 4 табл. 6.3.

2.8. Обчислити за формулою (6.6) теоретичні значення зсуву фаз $\varphi_{теор}$ для цих частот. Результати записати в колонку 5 табл. 6.3.

2.9. Побудувати графіки залежностей $\varphi_{теор}(f)$ і $\varphi_{експ}(f)$. Теоретичну залежність показати суцільною лінією, експериментальну – великими точками, не з'єднаними між собою.

2.10. Включити в схему рис. 6.8 RC -ланцюг № 2 з параметрами $R = 24 \text{ кОм}$, $C = 0,05 \text{ мкФ}$.

2.11. Провести вимірювання різниці фаз в діапазоні частот від 20 Гц до 200 Гц із кроком 20 Гц. Результати записати в колонки 2–4 табл. 6.4.

2.12. Обчислити за формулою (6.7) теоретичні значення зсуву фаз $\varphi_{теор}$ для цих частот. Результати записати в колонку 5 табл. 6.4.

2.13. Побудувати графіки залежностей $\varphi_{експ}(f)$ і $\varphi_{теор}(f)$. Теоретичну залежність показати суцільною лінією, експериментальну – великими точками, не з'єднаними між собою.

Таблиця 6.4

Вимірювання різниці фаз сигналів
методом фігур Ліссажу (схема 2)

f , Гц	h , мм	H , мм	$\varphi_{експ}$, °	$\varphi_{теор}$, °
1	2	3	4	5
20				
40				
60				
...				
200				

Похибки вимірювань

1. Оцінити похибки вимірювань величин T_1 , T , h і H на екрані осцилографа. Результати записати в зошит.

2. Вивести формули для оцінки похибки вимірювання зсуву фаз за формулами (6.1) і (6.5).

3. Оцінити похибки вимірювань зсуву фаз RC -ланцюгами № 1 і № 2 на частоті 100 Гц. Результати записати в зошит.

4. Вивести формули для оцінки похибок результатів розрахунків за формулами (6.6) і (6.7). Оцінити похибки на частоті 100 Гц, вважаючи, що

$$\frac{\Delta f}{f} = 1\%, \quad \frac{\Delta R}{R} = 10\%, \quad \frac{\Delta C}{C} = 10\%.$$

Результати записати в зошит.

5. Установити, чи узгоджуються між собою результати розрахунку та експерименту з урахуванням їх похибок.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок-схеми вимірювальних приладів;
- формули для визначення зсуву фаз RC -ланцюгами експериментальним і розрахунковим методами;
- залежність зсуву фаз сигналів від частоти після проходження їх через RC -ланцюги у вигляді таблиць і графіків;
- вивід формул для оцінки похибок експерименту та розрахунку;
- результати оцінки похибок експерименту та розрахунку на частоті 100 Гц.

Контрольні питання

1. Що таке фаза коливання?
2. Вимірювання різниці фаз за допомогою двопробеневого осцилографа. Блок-схема приладу. Вивід робочої формули.
3. Вимірювання різниці фаз за допомогою фігур Ліссажу. Блок-схема приладу. Вивід робочої формули.
4. Що таке абсолютна похибка результату вимірювань?
5. Що таке відносна похибка результату вимірювань?
6. Що таке непрямі вимірювання?
7. Формула для оцінки похибки результату непрямих вимірювань.
8. Вивід формул для похибок вимірювань і розрахунків різниці фаз.

Додаток

Оцінка похибки непрямих вимірювань

Непрямими називаються такі вимірювання, результат яких отримується шляхом обчислення за певною формулою.

Якщо шукана величина залежить від декількох величин x , y , u , v , отриманих у результаті прямих вимірювань, можна вважати, що z – це функція декількох змінних:

$$z = z(x, y, u, v).$$

Похибка визначення величини z визначається формулою [3]:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \Delta v\right)^2}. \quad (6.8)$$

де Δx , Δy , Δu , Δv – похибки визначення величин x , y , u , v .

Приклад

У прямокутному трикутнику ABC відомі розміри сторін b (катет) і c (гіпотенуза):

$$b = 17,6 \pm 0,2 \text{ м,}$$

$$c = 32,2 \pm 0,5 \text{ м.}$$

Знайти значення кута та похибку його визначення.

Розв'язок

Сторони b , c і кут α пов'язані співвідношенням

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

звідки

$$\alpha = \arccos \frac{b}{c} = 56,867^\circ. \quad (6.9)$$

Результат у формулі (6.9), записано з явним надлишком значущих цифр. Визначити їх необхідну кількість дозволяє оцінка похибки величини α .

Відповідно до формули (6.8):

$$\Delta \alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial c} \Delta c\right)^2}. \quad (6.10)$$

Часткові похідні $\frac{\partial \alpha}{\partial b}$ і $\frac{\partial \alpha}{\partial c}$, знайдені за правилами диференціювання складної функції (6.9), виглядають так:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial b} = -\frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial c} = \frac{b}{c^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}} = \frac{b}{c \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Підстановка цих виразів у (6.9) і наступні перетворення дають

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{(c \cdot \Delta b)^2 + (b \cdot \Delta c)^2}{c^2 - b^2}} = 0,0126 \text{ рад.}$$

У таких обчисленнях значення кутів отримуються в радіанах. У градусах це дає

$$\Delta\alpha = 0,72^\circ.$$

У значенні похибки залишають одну значущу цифру. Тому

$$\Delta\alpha = 0,7^\circ.$$

Відповідно до її значення округляється результат обчислення кута до однієї цифри після коми. Результат записується так:

$$\alpha = 56,9^\circ \pm 0,7^\circ.$$

Відносна похибка результату буде:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{0,72}{56,87} = 0,013 = 1,3\%.$$

Величини, що використовуються при її обчисленні, беруться з однією зайвою значущою цифрою.

Робота № 7**ВИМІРЮВАННЯ ЄМНОСТІ МЕТОДОМ РОЗРЯДУ
КОНДЕНСАТОРА ЧЕРЕЗ ОПІР****Мета роботи**

Вивчення методу вимірювання ємності конденсатора за часом його розряду через відомий опір.

Метод вимірювання

Схему вимірювань показано на рис. 7.1. Конденсатор ємністю C , заряджається до напруги U_0 , а потім підключається до опору R . Напруга на його обкладинках зменшуватиметься за законом

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7.1)$$

де $\tau = RC$ – постійна часу розряду.

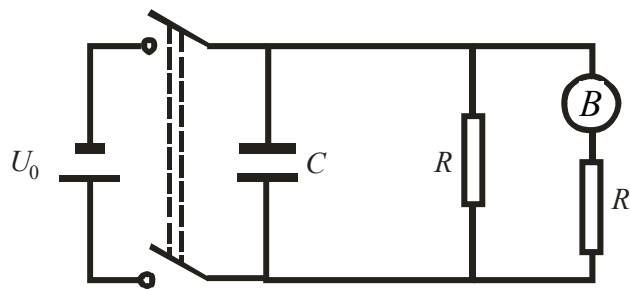


Рис. 7.1. Схема експериментального приладу

Сутність методу полягає у вимірюванні постійної часу розряду τ , після чого при відомому опорі R ємність конденсатора знаходиться за формулою

$$C = \frac{\tau}{R}. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) є справедливою, якщо внутрішній опір R_i вольтметра B нескінченно великий. Якщо ж він порівняний з опором R , його необхідно враховувати. Для цього вимірюються дві функції розряду конденсатора $U_1(t)$ і $U_2(t)$ при двох опорах R_1 і R_2 . Знаходяться відповідні

їм постійні часу τ_1 і τ_2 . Їх значення пов'язані зі значеннями ємності C і опорів R_1 , R_2 і R_i наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= C \frac{R_1 R_i}{R_1 + R_i}, \\ \tau_2 &= C \frac{R_2 R_i}{R_2 + R_i}.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Розв'язання цієї системи щодо величин C і R_i дає можливість визначити їх значення:

$$C = \frac{\tau_1 \tau_2 (R_1 - R_2)}{R_1 R_2 (\tau_1 - \tau_2)}, \quad R_i = \frac{R_1 R_2 (\tau_1 - \tau_2)}{R_1 \tau_2 - R_2 \tau_1}.\tag{7.4}$$

Порядок виконання роботи

1. Зібрати схему, показану на рис. 7.1. Підключити конденсатор, виданий викладачем. Як резистор R використовувати магазин опорів РЗЗ.
2. Встановити значення опору $R_1 = 90$ кОм.
3. Зняти залежність напруги на конденсаторі від часу $U_1(t)$ при його розряді через опір R_1 . Для цього:
 - приєднати конденсатор до джерела напруги. Встановити значення напруги $U_0 = 10$ В;
 - відключити конденсатор від джерела напруги. У момент відключення включити секундомір. Зняти залежність напруги на конденсаторі від часу протягом 4 хвилин з інтервалом 10 с.
4. Таким же способом зняти залежність напруги на конденсаторі від часу $U_2(t)$ при його розряді через опір $R_2 = 50$ кОм.
5. Обробити залежності $U_1(t)$ і $U_2(t)$ за допомогою методу найменших квадратів. Знайти значення постійних часу розряду τ_1 і τ_2 за методикою, викладеною в додатку до роботи. Побудувати залежності $U_1(t)$, $U_2(t)$, $\ln(U_1(t))$, $\ln(U_2(t))$, на які нанести експериментальні точки і графіки апроксимуючих функцій.
6. За формулами (7.4) обчислити значення ємності конденсатора C і внутрішнього опору вольтметра R .

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- схему експериментального приладу;
- таблиці та графіки залежностей $U_1(t)$ і $U_2(t)$;

- хід обчислень при визначенні постійних часу τ_1 і τ_2 і графіки лінеаризованих залежностей $\ln(U_1(t))$ і $\ln(U_2(t))$;
- Обчислення ємності конденсатора C і внутрішнього опору вольтметра R_j .

Контрольні питання

1. Сутність методу вимірювання ємності конденсатора за часом його розряду через відомий опір.
2. Виведення формули для вимірювання ємності з урахуванням впливу внутрішнього опору вольтметра.
3. Методика визначення постійної часу розряду конденсатора.

Література

1. Мирский Г. Я. Радиоэлектронные измерения / Г. Я. Мирский. – М. : Энергия, 1975. – 600 с.
2. Кассандрова О. Н. Обработка результатов наблюдений / О. Н. Кассандрова, В. В. Лебедев. – М. : Наука, 1970. – 104 с.

Додаток

Визначення постійної часу розряду конденсатора методом найменших квадратів

Постійна часу розряду конденсатора може бути визначена в результаті аналізу залежності напруги на ньому від часу. Ця залежність описується формулою (7.1). Графік її показаний на рис. 7.2а.

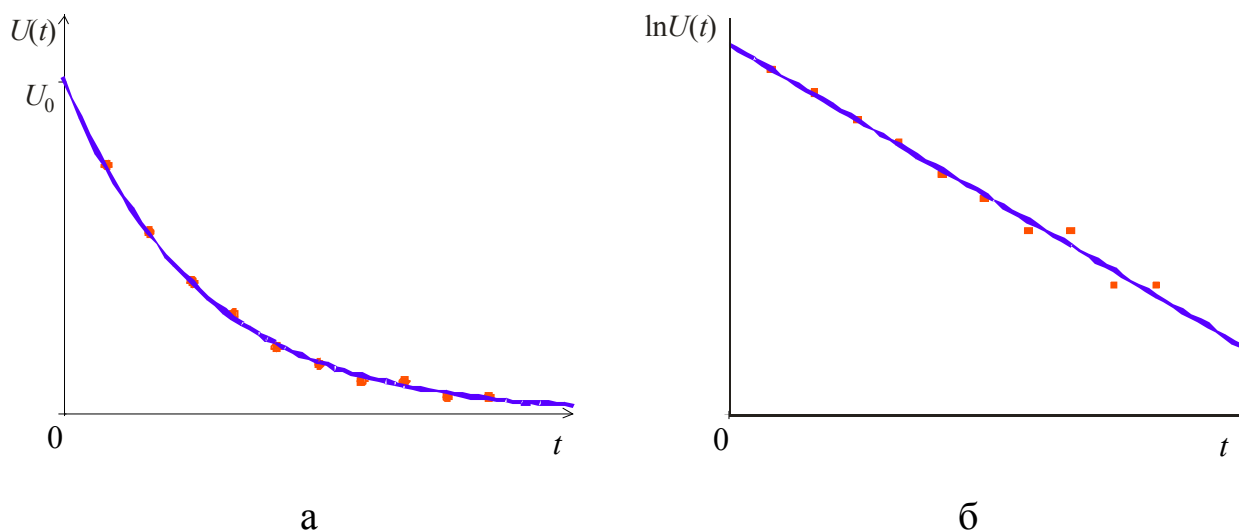


Рис. 7.2. Часові характеристики розряду конденсатора

Метод найменших квадратів дозволяє знайти такі значення параметрів U_0 і τ функції (7.1), при яких теоретична крива найкраще проходить через експериментальні точки. Функція (7.1) перетворюється так, щоб вийшла лінійна залежність. Для цього функція логарифмується. У результаті логарифмування виходить:

$$\ln U(t) = \ln U_0 - \frac{t}{\tau}. \tag{7.5}$$

Ця залежність лінійна щодо часу t :

$$f(t) = a_0 + a_1 t,$$

де $f(t) = \ln U(t), a_0 = \ln U_0, a_1 = -\frac{1}{\tau}.$ (7.6)

Щоб знайти параметри прямої a_0 і a_1 , необхідно заповнити наступну таблицю.

Таблиця

n	T _n , с	F _n = ln U _n	T _n ²	T _n F _n
1				
2				
3				
-----	-----	-----	-----	-----
N				
	$\sum T_n$	$\sum F_n$	$\sum T_n^2$	$\sum T_n F_n$

У нижньому рядку таблиці записуються суми чисел у колонках. Величини a_0 і a_1 є розв'язками системи рівнянь:

$$a_0 N + a_1 \sum_{n=1}^N T_n = \sum_{n=1}^N F_n,$$

$$a_0 \sum_{n=1}^N T_n + a_1 \sum_{n=1}^N T_n^2 = \sum_{n=1}^N T_n F_n.$$

З виразу (7.6) випливає, що

$$\tau = -\frac{1}{a_1}. \tag{7.7}$$

Робота № 8**ВИМІРЮВАННЯ ЄМНОСТІ МЕТОДОМ АНАЛІЗУ
ЧАСТОТНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ RC-ЛАНЦЮГА****Мета роботи**

Вивчення методу вимірювання ємності конденсатора, включеного в RC-ланцюг, шляхом аналізу його частотної характеристики [1, 4].

Метод вимірювань

Схему експериментального приладу показано на рис. 8.1.

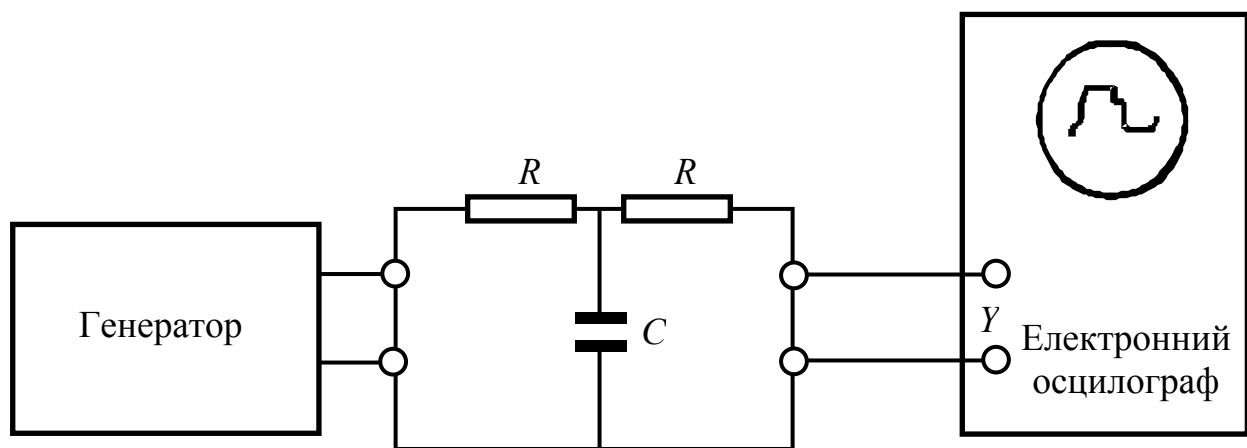


Рис. 8.1. Блок-схема експериментального приладу

RC-ланцюг працює як фільтр нижніх частот. Його амплітудно-частотна характеристика (залежність коефіцієнта передачі від частоти) визначається наступною формулою:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (8.1)$$

де f – частота, $\omega = 2\pi f$ – кругова частота.

Якщо опір R відомий, то, вимірявши коефіцієнт передачі K на відомій частоті f , з формули (8.1) можна знайти величину ємності C . Для підвищення точності вимірювання проводяться в певному діапазоні частот і отримані дані обробляються за методом найменших квадратів.

Порядок виконання роботи

1. Зібрати схему, показану на рис. 8.1.
2. Зняти амплітудно-частотну характеристику RC -ланцюга.
 - 2.1. Встановити частоту генератора $f = 10$ Гц.
 - 2.2. Подати сигнал з генератора на осцилограф, минаючи RC -ланцюг.
 - 2.3. Ручкою «Амплітуда» на генераторі і ручками регулювання підсилення на осцилографі встановити розмах синусоїди на екрані 60 мм.
 - 2.4. Подати сигнал на осцилограф з виходу RC -ланцюга.
 - 2.5. Виміряти за допомогою осцилографа сигнал на виході RC -ланцюга на частотах 1, 10, 50 Гц, від 100 Гц до 1000 Гц через 100 Гц, від 1000 Гц до 2000 Гц через 200 Гц, від 2000 Гц до 3500 Гц через 500 Гц.
3. Побудувати графік залежності коефіцієнта передачі RC -ланцюга $K(f) = U(f) / U_0$ від частоти, де $U(f)$ – сигнал на виході фільтра при частоті f , U_0 – сигнал на вході. Використовувати логарифмічний масштаб на осі абсцис. Дані нанести на графік у вигляді точок, що не поєднуються лініями.
4. За допомогою методу найменших квадратів знайти значення ємності C при опорі $R = 3$ кОм. Методика обчислень наведена в додатку до роботи.
5. На графік нанести у вигляді суцільної лінії криву $K(f)$, побудовану за формулою (8.1) при знайденому значенні ємності C .
6. Оцінити величину похибки ΔC визначення ємності за методикою, викладеною в додатку до роботи. Прийняти значення довірчої ймовірності $P = 0,95$.
7. Записати отриманий результат у стандартному вигляді, округливши за існуючими правилами значення похибки і величини ємності.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- схему експериментального приладу;
- таблицю і графік експериментальної залежності $K(f)$;
- обчислення ємності C за допомогою методу найменших квадратів і графік лінеаризованої залежності $1/[K(f^2)]^2$ з нанесеними експериментальними даними і апроксимуючої прямої лінії.
- обчислення похибки ΔC .

Контрольні питання

1. Сутність методу вимірювань ємності.
2. Лінеаризація залежності $K(f)$ і визначення ємності C .

3. Оцінка похибки визначення ємності ΔC .
4. Що таке довірча ймовірність і довірчий інтервал?

Додаток

Визначення ємності методом найменших квадратів

Вихідними даними для визначення ємності є експериментальна залежність коефіцієнта передачі $K(f)$ RC-ланцюга від частоти. Її типовий вигляд показано на рис. 8.2а.

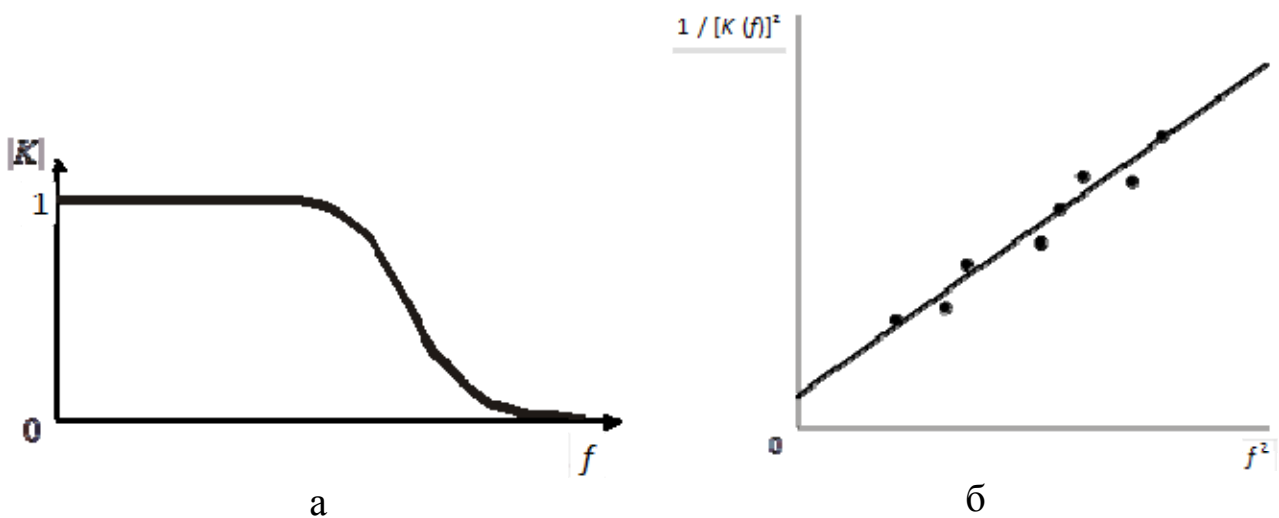


Рис. 8.2. Частотна характеристика RC-ланцюга

Ця залежність описується формулою

$$K(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}. \quad (8.2)$$

Щоб використати метод найменших квадратів, залежність (8.2) доцільно лінеаризувати – перейти до такого виду аргументу і функції, залежність між якими є лінійною.

Для цього зведемо в квадрат обидві частини рівності (8.2), а потім знайдемо їх зворотні величини. У результаті отримаємо:

$$\frac{1}{[K(f)]^2} = 1 + a_1 f^2, \quad (8.3)$$

де

$$a_1 = (2\pi RC)^2. \quad (8.4)$$

Якщо по осі абсцис відкласти f^2 , а по осі ординат – величину $1/[K(f)]^2$, вийде лінійна залежність. Вона показана на рис. 8.2б. Отже, її можна шукати у вигляді

$$y(f) = a_0 + a_1 x,$$

де $y(x) = 1/[K(f)]^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = (2\pi RC)^2$, $x = f^2$.

Щоб знайти параметри прямої a_0 та a_1 , необхідно заповнити наступну таблицю:

Таблиця 8.1

Аналіз амплітудно-частотної характеристики RC-ланцюга

n	$x_n = f^2$	$y_n = 1/[K(f)]^2$	x_n^2	$x_n y_n$
1				
2				
3				
-----	-----	-----	-----	-----
N				
	$\sum x_n$	$\sum y_n$	$\sum x_n^2$	$\sum x_n y_n$

У нижньому рядку таблиці записуються суми чисел у колонках. Величини a_0 і a_1 є розв'язками наступної системи рівнянь:

$$a_0 N + a_1 \sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^N y_n,$$

$$a_0 \sum_{n=1}^N x_n + a_1 \sum_{n=1}^N x_n^2 = \sum_{n=1}^N x_n y_n.$$

Зі співвідношення (8.4) випливає, що ємність конденсатора дорівнює

$$C = \frac{\sqrt{a_1}}{2\pi R}. \quad (8.5)$$

Похибка визначення ємності конденсатора

Згідно правил оцінки похибки непрямих вимірювань

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial a_1} \Delta a_1\right)^2}.$$

Обчисливши похідні $\partial C / \partial R$ і $\partial C / \partial a_1$ та зробивши деякі перетворення, отримаємо:

$$\frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_1}{2a_1}\right)^2}. \quad (8.6)$$

1. Похибка ΔR визначається класом точності використаного в експерименті магазину опорів Р33 – класом 0,2. Це означає що

$$\frac{\Delta R}{R_{\max}} = 0,2 \% = 0,0002,$$

де $R_{\max} = 10^5$ Ом – максимальне значення опорів цього магазину. Звідси $\Delta R = 0,0002 R_{\max} = 20$ Ом.

2. Похибка визначення коефіцієнта a_1 апроксимуючої кривої знаходиться за формулами (3.5–3.6) розділу 3:

$$\Delta a_1 = t(P; N - 1) S \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}_{\tilde{n}\delta})^2}}, \quad (8.7)$$

де $t(P; N - 1)$ – коефіцієнт Стюдента при довірчій ймовірності P і кількості вимірювань N , $\bar{x}_{\tilde{n}\delta}$ – середнє значення величини x ,

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N [y_n - (a_0 + a_1 x_n)]^2}{N - 2}}. \quad (8.8)$$

Робота № 9**ВИМІРЮВАННЯ ПИТОМОГО ОПОРУ ПРОВІДНИКА****Мета роботи**

Перевірка закону Ома та визначення питомого електричного опору провідника.

**Електричний опір провідника.
Питомий опір**

Електричний опір циліндричного провідника R визначається наступною залежністю:

$$R = \rho \frac{l}{s}, \quad (9.1)$$

де l – довжина провідника, s – площа його поперечного перетину, ρ – питомий електричний опір речовини провідника.

Звідси

$$\rho = \frac{R s}{l}. \quad (9.2)$$

Для визначення площі поперечного перерізу необхідно виміряти діаметр d провідника. З урахуванням цього отримуємо

$$\rho = \frac{\pi d^2 R}{4l}. \quad (9.3)$$

Порядок виконання роботи

1. Виміряти лінійкою довжину провідника. Проробити вимірювання 5 разів. Результати занести в табл. 9.1. Оцінити абсолютну похибку Δl і відносну похибку $\Delta l/l$ результатів при довірчій ймовірності $P = 0,95$ за методикою, викладеною в розділі 1.4.2.

Таблиця 9.1

Вимірювання довжини провідника

n	$l_n, \text{ м}$	$(l_n - l_{cp})^2, \text{ м}^2$
1		
2		
3		
4		
5		

2. Виміряти мікрометром діаметр провідника. Зробити вимірювання 5 разів. Результати занести в табл. 9.2. Оцінити абсолютну похибку Δd і відносну похибку $\Delta d/d$ при довірчій ймовірності $P = 0,95$ за методикою, викладеною в розділі 1.4.2.

Таблиця 9.2

Вимірювання діаметра провідника

n	$d_n, \text{мм}$	$(d_n - d_{cp})^2, \text{мм}^2$
1		
2		
3		
4		
5		

3. Зібрати схему для вимірювання опору R провідника, показану на рис. 9.1.

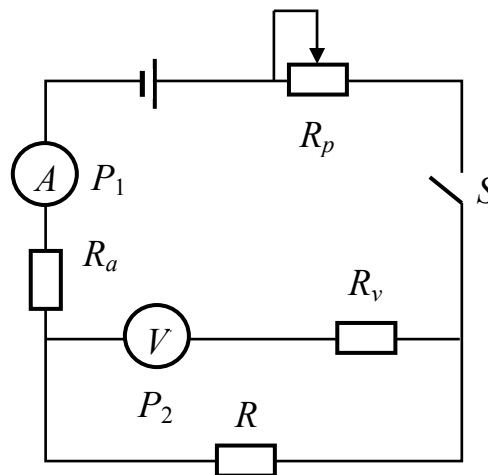


Рис. 9.1. Схема для вимірювання опору:
 R_p – змінний опір; R_a – внутрішній опір амперметра;
 R_v – внутрішній опір вольтметра; R – вимірюваний опір

4. Зняти залежність сили струму в провіднику від прикладеної до нього напруги. Для цього, змінюючи величину опору R_p , виміряти струм I при 10 значеннях напруги U на провіднику. Результати занести в табл. 9.3.

5. Побудувати графік залежності $I(U)$ і переконатися в лінійному характері цієї залежності.

6. За допомогою методу найменших квадратів знайти опір провідника R за кутовим коефіцієнтом залежності $I(U)$.

7. Обчислити питомий опір ρ за формулою (9.3).

Оформлення роботи

1. Схема експериментального приладу.
2. Таблиця та графік залежності $I(U)$.
3. Хід обчислень при використанні методу найменших квадратів, значення параметрів прямої, графік теоретичної залежності $I(U)$.
4. Значення опору провідника R .
5. Оцінка абсолютної та відносної похибок визначення опору методом найменших квадратів.
6. Значення питомого опору провідника. Можливий матеріал провідника, визначений за таблицею значень питомих опорів.
7. Оцінка абсолютної та відносної похибок визначення питомого опору провідника.

Таблиця 9.3

Результати вимірювань

n	$U_n, \text{В}$	$I_n, \text{А}$	U_n^2	$U_n I_n$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Контрольні питання

1. Сутність методу вимірювання питомого опору провідника.
2. Вивід формули для визначення питомого опору провідника.
3. Оцінка похибки вимірювання опору провідника та питомого опору провідника.

Додаток 1

Метод найменших квадратів. Лінійна апроксимація

Необхідно підібрати такі значення параметрів k і b , щоб пряма $i(u) = ku + b$ краще проходила через масив експериментальних точок $I(U)$. Для цього необхідно, щоб мінімальною була функція

$$S(k, b) = \sum_n [(kU_n + b) - I_n]^2.$$

Необхідна для цього умова:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Використання її дає таку систему рівнянь (див. розділ 3.2.1):

$$\begin{cases} k \sum_n U_n^2 + b \sum_n U_n = \sum_n U_n I_n, \\ k \sum_n U_n + bN = \sum_n I_n. \end{cases} \quad (9.4)$$

Тут N – число експериментальних точок.

Опір провідника:

$$R = \frac{1}{k}. \quad (9.5)$$

За допомогою методу найменших квадратів можна оцінити похибки визначення параметрів (див. розділ 3.2.2):

$$\Delta k = t(P; N - 2) S \sqrt{\frac{1}{\sum_n (U_n - U_{cp})^2}}, \quad (9.6)$$

$$\Delta b = t(P; N - 2) S \sqrt{\frac{\sum_n U_n^2}{N \sum_n (U_n - U_{cp})^2}}, \quad (9.7)$$

де $U_{cp} = \frac{\sum U_n}{N}$, $S = \sqrt{\frac{\sum [I_n - (kU_n + b)]^2}{N-2}}$, t – коефіцієнт Стьюдента для довірчої ймовірності P і кількості вимірювань $N-2$. При розрахунках вважати $P = 0,95$.

Абсолютну похибку визначення опору R можна оцінити за правилами для похибки непрямих вимірювань:

$$\Delta R = \left| \frac{dR}{dk} \right| \Delta k = \frac{\Delta k}{k^2}. \quad (9.8)$$

Відносна похибка:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta k}{k}. \quad (9.9)$$

Застосувавши правила оцінки похибки непрямих вимірювань до формули (9.3), отримаємо наступне співвідношення для відносної похибки значення питомого опору:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^2}. \quad (9.10)$$

Додаток 2

Питомий опір провідників

Матеріал	ρ , Ом·м
Алюміній	$2,7 \cdot 10^{-8}$
Вольфрам	$5,4 \cdot 10^{-8}$
Залізо	$10,1 \cdot 10^{-8}$
Золото	$2,2 \cdot 10^{-8}$
Константан	$50 \cdot 10^{-8}$
Мідь	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Молібден	$5,7 \cdot 10^{-8}$
Нікель	$6,9 \cdot 10^{-8}$
Ніхром	$100 \cdot 10^{-8}$
Платина	$11 \cdot 10^{-8}$
Срібло	$1,6 \cdot 10^{-8}$

Робота № 10**ВИМІРЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО
КОЕФІЦІЄНТА ОПОРУ МІДІ****Мета роботи**

Дослідити залежність опору мідного дроту від температури і знайти значення параметрів цієї залежності [1, 6, 7].

**Залежність електричного опору
провідників від температури**

Електричний струм – це впорядкований рух зарядів. Носіями струму є електрони та іони. Для існування електричного струму необхідною є наявність сторонніх сил, які створюються джерелами струму (гальванічними елементами, акумуляторами, електричними генераторами). Вони підтримують на кінцях електричного ланцюга різницю потенціалів – створюють електричне поле. Це поле змушує рухатися носії струму.

У процесі руху носії струму стикаються з кристалічною ґраткою речовини і передають їй частину своєї енергії. Ці зіткнення ускладнюють рух зарядів і проявляються у вигляді опору провідників електричному струму.

Опір провідників залежить від температури. При її збільшенні виникають два фактори, що впливають на опір – збільшення рухливості носіїв струму і зростання частоти зіткнень носіїв струму з кристалічною ґраткою. Вплив цих факторів є протилежним: перший зменшує опір, другий – збільшує.

У напівпровідниках, електролітах, плазмі переважає вплив першого фактора, і вони зменшують свій опір при збільшенні температури. У більшості металів та їх сплавів переважає другий чинник, так що їх опір збільшується із зростанням температури.

У даній роботі досліджується температурна залежність опору металу. Вона може бути описана наступним виразом:

$$R = R_0(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \dots), \quad (10.1)$$

де T – температура в градусах Цельсія, R_0 – опір при $T = 0$ °С, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ – температурні коефіцієнти опору (ТКО) 1-го, 2-го, 3-го і т.д. порядку.

Опір металів мало залежить від температури. Тому величини коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ – малі. При нагріванні до декількох десятків

градусів у виразі (10.1) досить враховувати тільки коефіцієнт α_1 . При нагріванні до декількох сотень градусів – ще коефіцієнти α_2 і α_3 .

Порядок виконання роботи

Схема експериментального приладу показана на рис. 10.1. Мідний дріт 1 діаметром 0,08 мм намотаний на каркас 2. Кінці його підведені до клем 3 і 4. Каркас з намотаним дротом розміщено усередину порожнистого резистора 5, який служить нагрівачем. Під час експерименту резистор підключається до мережі 220 В 50 Гц. Температура дроту вимірюється термометром 6, який знаходиться всередині каркасу 2.

Для вимірювання опору дроту через нього пропускається електричний струм i від блоку живлення БЖ. Струм вимірюється амперметром A . Вольтметром B вимірюється падіння напруги U на дроті.

1. Зібрати експериментальний прилад.
2. Виміряти температуру дроту T .
3. Подати напруга від блоку живлення БЖ на клеми 3 і 4. Встановити напругу $U = 2$ В і виміряти струм i , що протікає через дріт при цій температурі.
4. Включити нагрівач.
5. Стежити за підвищенням температури нагрівача. При досягненні температури 90 °С нагрівач відключити.

Увага! Відключити нагрівач не пізніше цього моменту. Інакше термометр може вийти з ладу.

6. Зачекати, доки температура досягне максимуму і почне зменшуватися. У ході остигання зняти залежність напруги U на дроті і струму i через неї від температури T з інтервалом $\Delta T = 5$ °С. Результати вимірювань, включаючи результат при початковій температурі, занести в стовпці 2–4 табл. 10.1.

Таблиця 10.1

До визначення температурного коефіцієнту опору міді

n	T_n, C	$U_n, \text{В}$	$i_n, \text{А}$	$R_n, \text{Ом}$	T_n^2	T_n^3	T_n^4	$T_n R_n$	$T_n^2 R_n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T_1	U_1	i_1	R_1					
2	T_2	U_2	i_2	R_2					
3	T_3	U_3	i_3	R_3					
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----
N	T_n	U_n	i_n	R_N					
	$\sum T_n$			$\sum R_n$	$\sum T_n^2$	$\sum T_n^3$	$\sum T_n^4$	$\sum T_n R_n$	$\sum T_n^2 R_n$

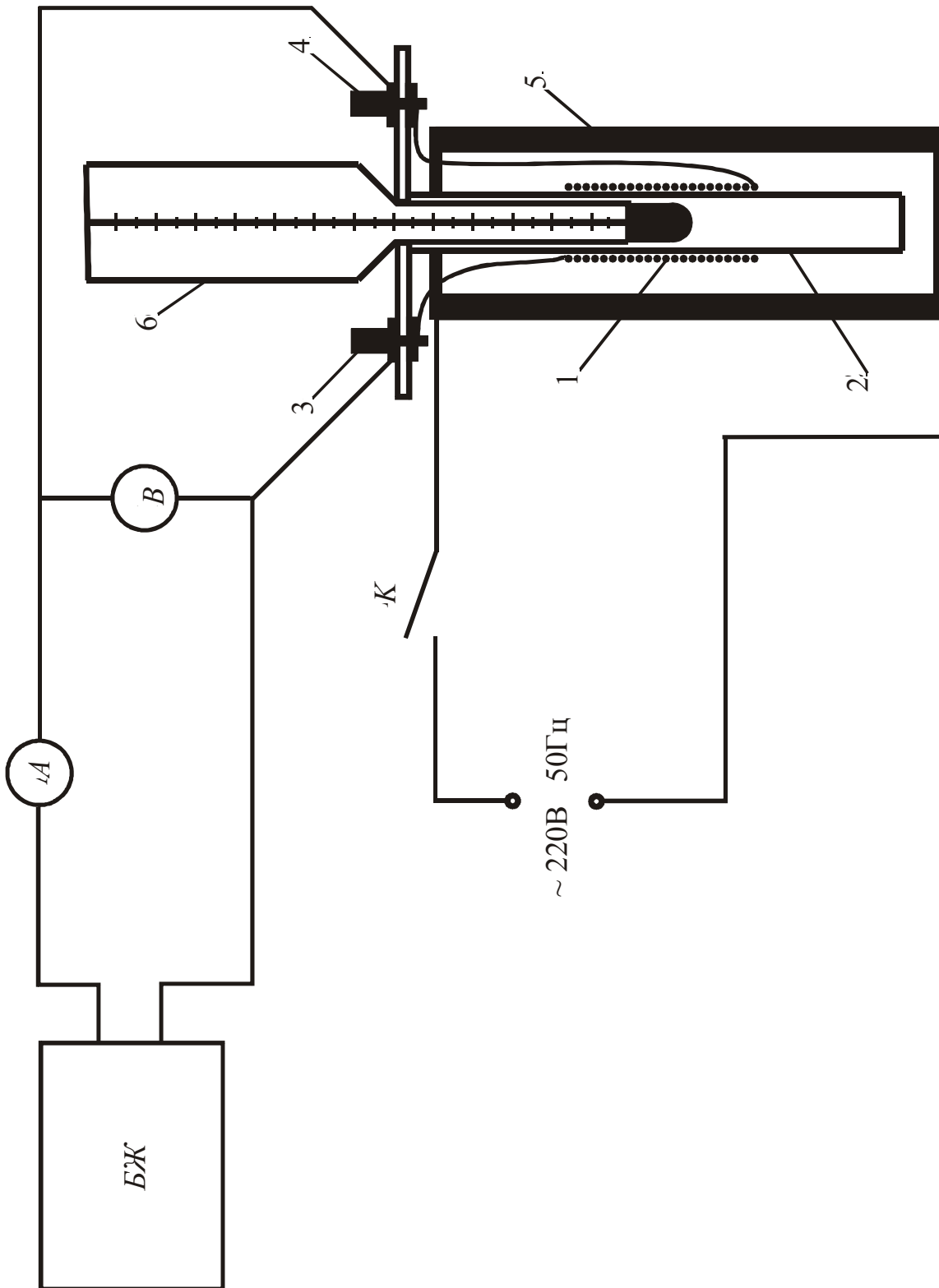


Рис. 10.1. Схема експериментального приладу

7. Обчислити опір дроту за формулою $R_n = U_n / i_n$. Результати занести в стовпець 5 табл. 10.1.

8. Побудувати графік залежності $R_n (T_n)$. Дані нанести у вигляді великих точок, не з'єднаних лініями.

9. За допомогою методу найменших квадратів знайти параметри апроксимуючого полінома 2-го ступеня (методику розрахунку подано в додатку):

$$r(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2. \quad (10.2)$$

10. Перетворити формулу (10.2) до вигляду (10.1) і знайти:

$$R_0 = a_0, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

11. Визначити розмірність величин R_0, α_1, α_2 .

12. Нанести криву $r (T)$ на графік у вигляді суцільної лінії.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- схему експериментального приладу;
- таблицю з результатами експерименту;
- хід обчислень коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 формули (10.2), і величин R_0, α_1, α_2 і результати цих обчислень;
- графік експериментальної залежності $R (T)$ і апроксимуючої формули (10.1).

Контрольні питання

1. Чому електричний опір провідників залежить від температури?
2. Як залежить від температури опір металів, напівпровідників, електролітів і плазми?
3. Використання методу найменших квадратів при поліноміальній апроксимації експериментальної залежності.

Додаток

Метод найменших квадратів. Поліноміальна апроксимація

Апроксимуюча формула шукається у вигляді полінома, ступінь якого задається дослідником. У даному випадку ця формула має вигляд (10.2).

Щоб знайти коефіцієнти a_0, a_1, a_2 , які входять до неї, потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 a_0 N + a_1 \sum_{n=1}^N T_n + a_2 \sum_{n=1}^N T_n^2 &= \sum_{n=1}^N R_n, \\
 a_0 \sum_{n=1}^N T_n + a_1 \sum_{n=1}^N T_n^2 + a_2 \sum_{n=1}^N T_n^3 &= \sum_{n=1}^N T_n R_n, \\
 a_0 \sum_{n=1}^N T_n^2 + a_1 \sum_{n=1}^N T_n^3 + a_2 \sum_{n=1}^N T_n^4 &= \sum_{n=1}^N T_n^2 R_n.
 \end{aligned}$$

Для обчислення сум, що входять сюди, необхідно заповнити в табл. 10.1 стовпці 6–10.

Робота № 11

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ФІЛЬТРІВ

Мета роботи

Вимірювання амплітудно-частотних характеристик RC -фільтрів [16, 7].

Електричні фільтри

Електричний фільтр – це пристрій, який вибірково пропускає сигнали з різними частотами. Його можна розглядати як чотириполюсник, коефіцієнт передачі якого в певній смузі частот наближений до одиниці, в іншому діапазоні – малий. Залежно від діапазону частот, які пропускаються, розрізняють фільтри нижніх частот, фільтри верхніх частот, смугові та загороджувальні фільтри.

У діапазоні звукових і радіочастот (до 10 МГц) широко використовуються фільтри у вигляді різного роду RC -ланцюжків, на більш високих частотах (до 3000 МГц) частіше застосовуються LC -фільтри. На низьких частотах RC -фільтри є більш компактними, дешевшими, вони мало бояться наведень.

Фільтри нижніх частот (ФНЧ) пропускають низькі та не пропускають високі частоти. Схема простого ФНЧ показана на рис. 11.1а. Це діляк напруги, що складається з активного опору R і ємнісного опору X_C , з якого знімається вихідна напруга. На низьких частотах значення X_C є великим, на високих – малим. Тому вихідна напруга буде великою на низьких частотах і малою – на високих частотах. Типову амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) такого фільтра показано на рис. 11.1б.

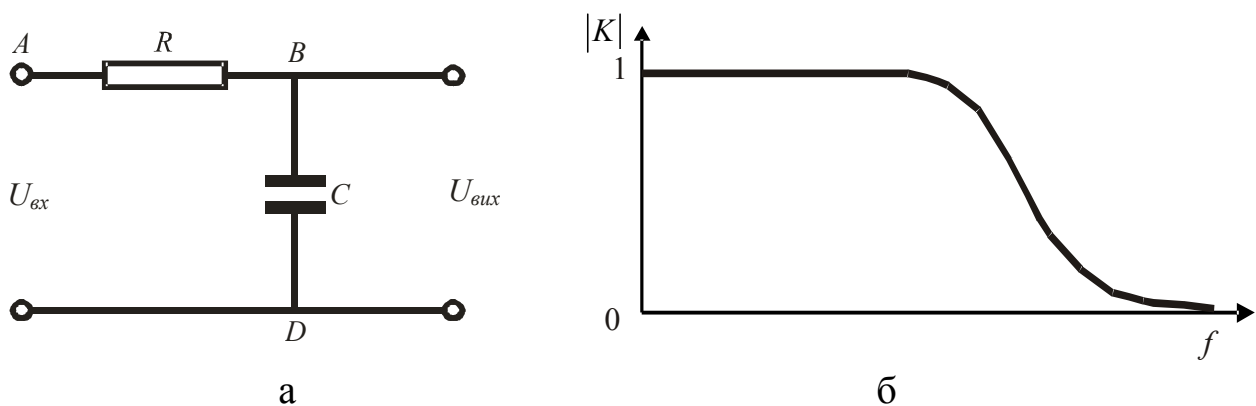


Рис. 11.1. RC -фільтр нижніх частот (а)
і його АЧХ (б)

Напруга на виході фільтра відповідно до закону Ома дорівнює

$$U_{вих} = i X_C, \quad (11.1)$$

де i – струм через фільтр. Струм визначається повним опором ланцюга і вхідною напругою:

$$i = \frac{U_{вх}}{R + X_C}. \quad (11.2)$$

Комбінуючи формули (11.1) і (11.2), отримаємо такий вираз для коефіцієнта передачі ФНЧ:

$$K = \frac{U_{вих}}{U_{вх}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (11.3)$$

Тут враховано, що $X_C = \frac{1}{j\omega C}$, де $\omega = 2\pi f$ – кругова частота сигналу, $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Коефіцієнт передачі K – комплексна величина. Фільтр змінює на виході і амплітуду сигналу, і його фазу. Це добре видно, якщо записати вираз (11.3) у показовій формі:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \exp(j \arctg(\omega RC)).$$

Модуль цього виразу описує амплітудно-частотну характеристику

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (11.4)$$

аргумент – фазово-частотну характеристику

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega RC). \quad (11.5)$$

Фільтри верхніх частот (ФВЧ) пропускають високі і не пропускають низькі частоти. Схему RC -фільтра верхніх частот подано на рис. 11.2а.

Вихідна напруга при збільшенні частоти сигналу зростає, оскільки при цьому зменшується величина ємнісного опору X_C , включеного послідовно з активним опором R , з якого знімається вихідний сигнал. Типову АЧХ фільтра верхніх частот показано на рис. 11.2б.

У цій схемі

$$U_{вих} = iR, \quad i = \frac{U_{вх}}{R + X_C}.$$

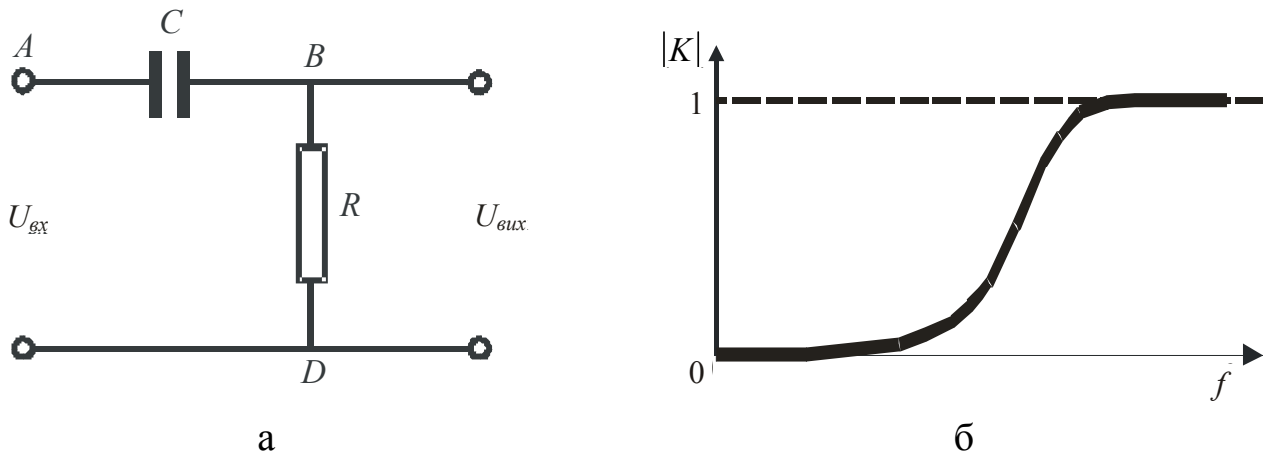


Рис. 11.2. RC-фільтр верхніх частот (а) і його АЧХ (б)

Тому

$$K = \frac{U_{вих}}{U_{вх}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}. \quad (11.6)$$

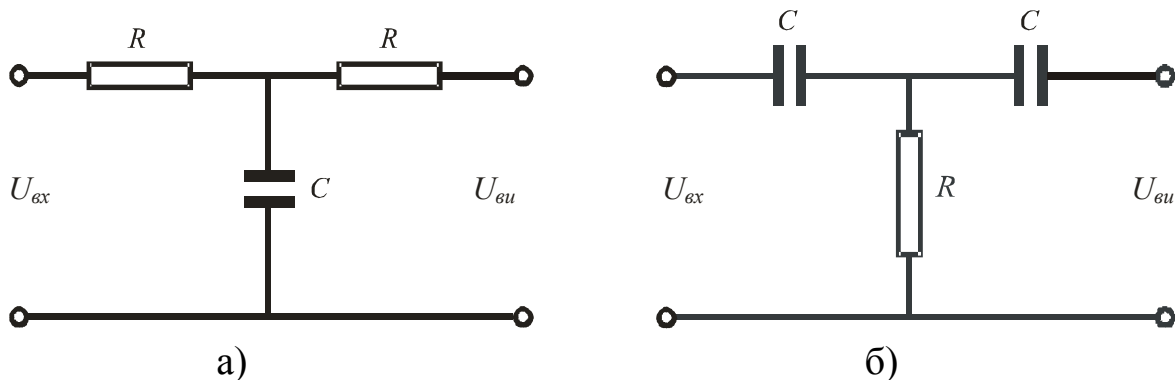
Розділивши в цьому комплексному виразі модуль і аргумент, отримаємо формули для АЧХ і ФЧХ:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}, \quad (11.7)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

У схемах ФНЧ і ФВЧ часто буває присутній ще один додатковий резистор R або конденсатор C , як показано на рис. 11.3.

Наявність цих додаткових елементів не змінює частотних характеристик фільтрів, якщо вхідний опір навантаження є великим. Такі фільтри можна з'єднувати в більш складні схеми – смугові і загороджувальні фільтри.



**Рис. 11.3. RC-фільтри з трьох елементів:
а – фільтр нижніх частот, б – фільтр верхніх частот**

Смуговий фільтр (СФ) добре пропускає сигнали з частотами, близькими до певної центральної частоти f_0 , і не пропускає сигнали з частотами, далекими від неї. Реалізувати такий фільтр можна, з'єднавши фільтр нижніх частот і фільтр верхніх частот послідовно (рис. 11.4).

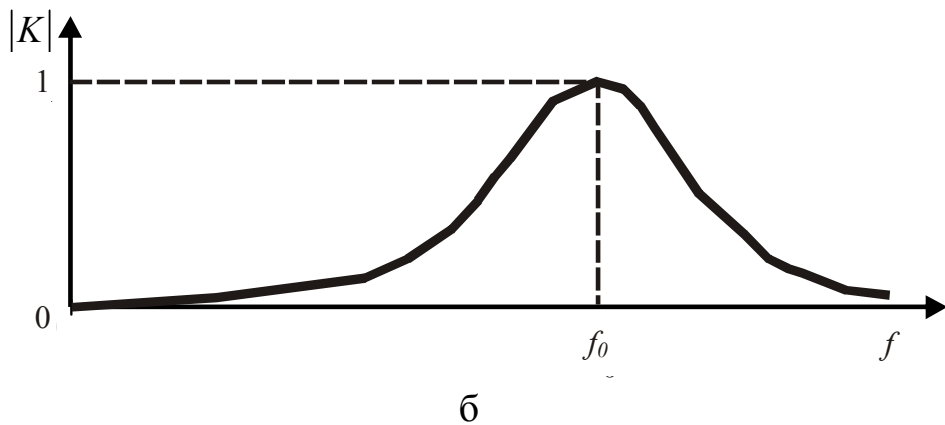
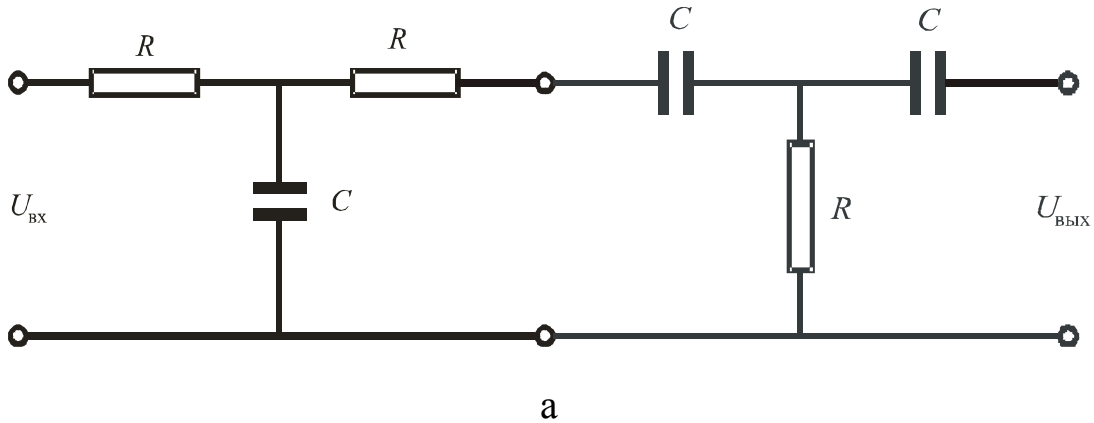


Рис. 11.4. Смуговий RC-фільтр (а) і його АЧХ (б)

Загороджувальний фільтр (ЗФ) не пропускає сигнали з частотами, близькими до частоти f_0 , і пропускає сигнали з частотами, далекими від неї. Реалізувати його можна, з'єднавши фільтр нижніх частот і фільтр верхніх частот паралельно (рис. 11.5). Така схема носить назву подвійного Т-моста.

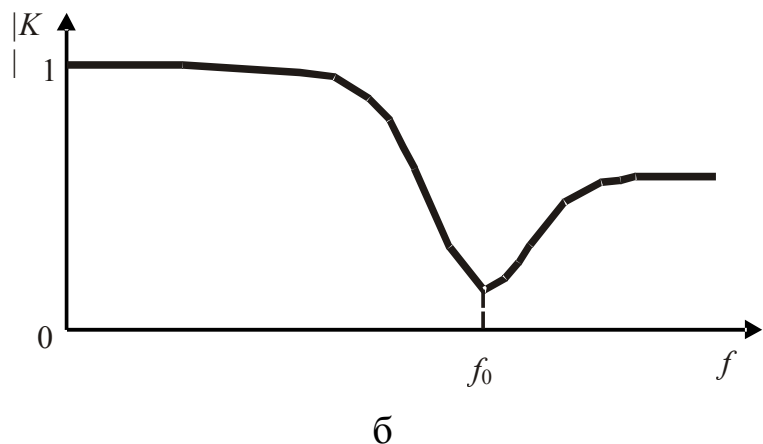
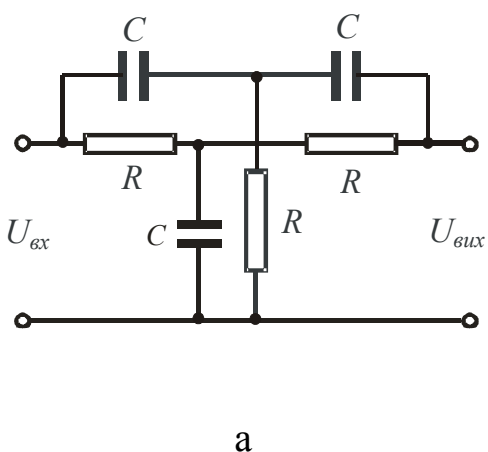


Рис. 11.5. Загороджувальний RC-фільтр (а) і його АЧХ (б)

Порядок виконання роботи

1. Зібрати експериментальний прилад відповідно до блок-схеми рис. 11.6. Схему досліджуваного макета показано на рис. 11.7.

2. Зняти амплітудно-частотну характеристику фільтра нижніх частот, для чого слід виконати наступні дії.

2.1. Подати сигнал з генератора на Y -вхід електронного осцилографа.

2.2. Установити частоту сигналу $f = 100$ кГц.

2.3. За допомогою ручки генератора «Амплітуда» і ручок регулювання підсилення осцилографа встановити розмах сигналу на екрані осцилографа в межах 6–8 великих ділень сітки. Записати значення сигналу. Це сигнал $U_{\text{вх}}$.

2.4. Подати сигнал від генератора на клеми 1 і 2 макета (вхід ФНЧ).

2.5. Клеми 4 і 5 макета (вихід ФНЧ) з'єднати з Y -входом осцилографа.

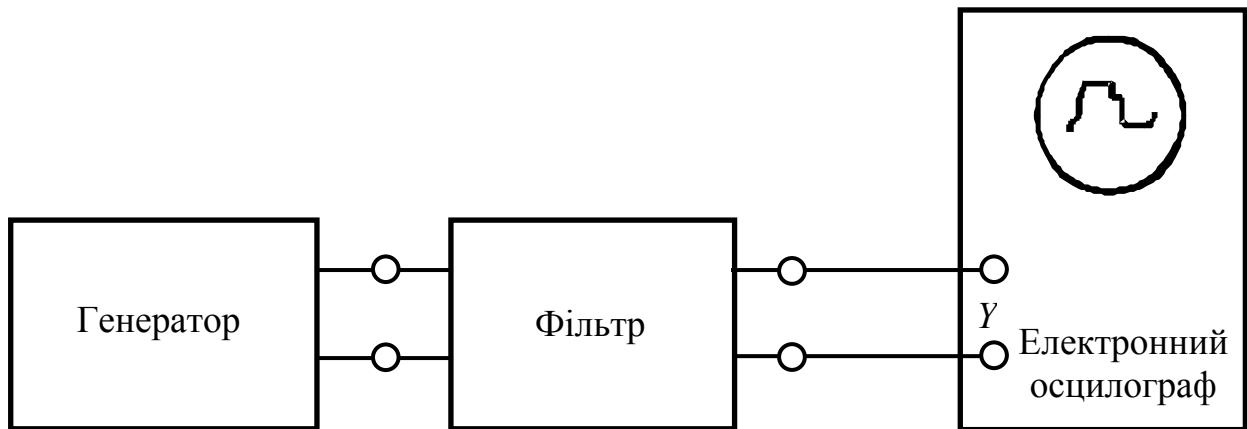


Рис. 11.6. Блок-схема експериментального приладу

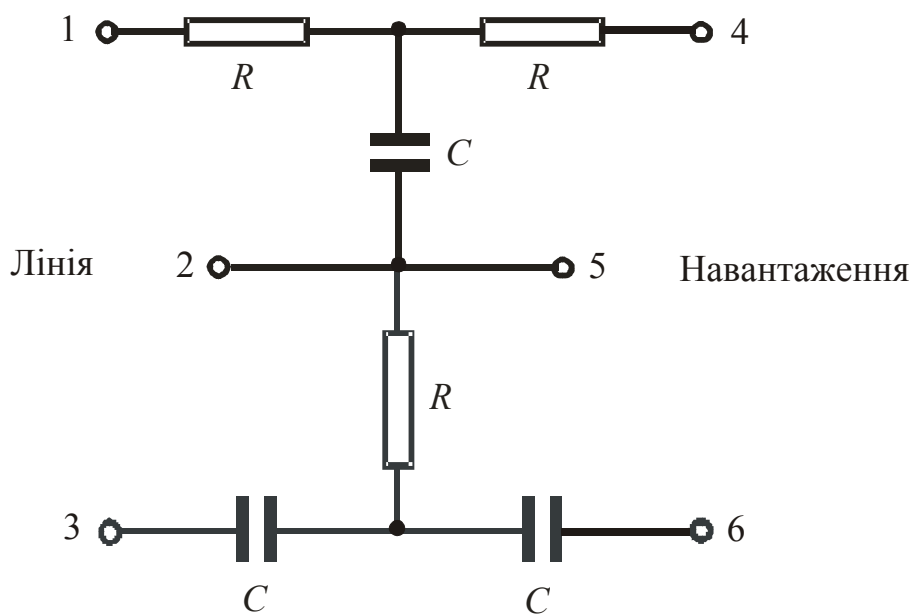


Рис. 11.7. Схема макета з RC-фільтрами

2.6. Виміряти сигнал на екрані осцилографа при частотах генератора $f = 0,1, 1, 10, 50, 100, 200, 400, 600, 800, 1000, 2000, 4000, 6000, 8000, 10000$ Гц. Результати вимірювань записати в табл. 11.1 (стовпець 2).

Таблиця 11.1

АЧХ фільтра

f , Гц	$U_{вих}$, под.	Коеф. передачі K	
		Експеримент	Теорія
1	2	3	4
0,1			
1			
10			
...			
8000			
10000			

2.7. Обчислити коефіцієнт передачі фільтра $K = U_{\hat{a}\hat{o}} / U_{\hat{a}\hat{o}}$. Результати записати в стовпець 3 табл. 11.1.

2.8. За формулою (11.4) обчислити коефіцієнт передачі фільтра для частот, на яких проводилися вимірювання. Результати розрахунку занести в стовпець 4 табл. 11.1.

2.9. За допомогою формули (11.4) розрахувати теоретичну АЧХ фільтра.

2.10. Побудувати графік АЧХ фільтра. Для горизонтальної осі використовувати логарифмічний масштаб. Результати експерименту нанести у вигляді великих точок, розрахункові дані – у вигляді суцільної лінії.

3. Зняти амплітудно-частотну характеристику фільтра верхніх частот. Для цього повторити дії за пп. 2.1–2.9, але сигнал від генератора подати на клеми 3 і 2 макету (вхід ФВЧ), а з Y -входом осцилографа з'єднати клеми 6 і 5 (вихід ФВЧ). Для обчислення коефіцієнта передачі фільтра використовувати формулу (11.7).

4. Зняти амплітудно-частотну характеристику смугового фільтра.

4.1. З'єднати послідовно фільтр нижніх частот і фільтр високих частот (див. рис. 11.4а).

4.2. Сигнал від генератора подати на вхід фільтра, а його вихід з'єднати з Y -входом осцилографа.

4.3. Установити частоту сигналу $f = 300$ Гц.

4.4. За допомогою ручки генератора «Амплітуда» і ручок регулювання підсилення осцилографа встановити розмах сигналу на екрані осцилографа в межах 6–8 великих ділень сітки. Записати значення сигналу U_{max} .

4.5. Виміряти сигнал на екрані осцилографа на частотах, зазначених у п. 2.6. Результати записати в стовпець 2 табл. 11.1.

4.6. Обчислити коефіцієнт передачі фільтра $K = U_{\hat{a}\hat{o}} / U_{\max}$. Результати записати в стовпець 3 табл. 11.1.

4.7. Побудувати АЧХ фільтра.

4. Зняти амплітудно-частотну характеристику загороджувального фільтра.

5.1. З'єднати паралельно фільтр нижніх частот і фільтр високих частот (див. рис. 11.5а).

5.2. Сигнал від генератора подати на вхід фільтра, його вихід з'єднати з Y-входом осцилографа.

5.3. Установити частоту сигналу $f = 0,1$ Гц.

5.4. За допомогою ручки генератора «Амплітуда» і ручок регулювання підсилення осцилографа встановити розмах сигналу на екрані осцилографа в межах 6–8 великих ділень сітки. Записати значення сигналу U_{ex} .

5.5. Виміряти сигнал на екрані осцилографа на частотах, зазначених у п. 2.6. Результати записати в стовпець 2 табл. 11.1.

5.6. Обчислити коефіцієнт передачі фільтра $K = U_{\hat{a}\hat{o}} / U_{\hat{a}\hat{o}}$. Результати записати в стовпець 3 табл. 11.1.

5.7. Побудувати АЧХ фільтра.

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- схеми RC-фільтрів нижніх частот, верхніх частот, смугового і загороджувального;
- формули для АЧХ фільтрів нижніх і верхніх частот;
- схему експериментального макета;
- блок-схему експериментального приладу;
- таблиці з результатами експерименту і розрахунку АЧХ для фільтрів нижніх і верхніх частот;
- таблиці з результатами експерименту для смугового і загороджувального фільтрів;
- графіки АЧХ з результатами експерименту і розрахунку для фільтрів нижніх і верхніх частот;
- графіки АЧХ з результатами експерименту для смугового і загороджувального фільтрів.

Контрольні питання

1. Для чого використовуються електричні фільтри?
2. Схеми простих RC-фільтрів нижніх частот, верхніх частот, смугового та загороджувального фільтрів. Їх амплітудно-частотні характеристики.
3. Вивід формул для АЧХ фільтрів нижніх і верхніх частот.

Робота № 12**ВИМІРЮВАННЯ ПОКАЗНИКА
ЗАЛОМЛЕННЯ ПЛЕКСИГЛАСУ****Мета роботи**

Дослідження заломлення світла на межі розділу середовищ. Вимірювання показника заломлення середовища [18].

Теоретичні співвідношення

Показник заломлення – один з параметрів середовища. Він визначається таким співвідношенням:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (12.1)$$

де c – швидкість світла у вільному просторі, v – швидкість світла в середовищі.

На межі розділу двох середовищ промінь світла відбивається і заломлюється (рис. 12.1). Напрямок відбитого і заломленого променів визначається законами Снелліуса:

$$\varphi_{\dot{a}} = \varphi_{i\dot{a}\dot{a}} = \varphi, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{n_2}{n_1} = n. \quad (12.2)$$

Тут $\varphi_{i\dot{a}\dot{a}}$ – кут падіння променя, $\varphi_{\dot{a}}$ – кут відбиття. Вони однакові за величиною і далі позначаються буквою φ , ψ – кут заломлення, n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ, n – відносний показник заломлення.

Заломлення променя на межі розділу середовищ приводить до того, що при проходженні променя через плоскопаралельну прозору пластину він зсувається паралельно самому собі на певну відстань l (рис. 12.2). Величина зсуву залежить від кута падіння світла на пластину φ , показника заломлення пластини n і товщини пластини d :

$$l = d \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos\psi}. \quad (12.3)$$

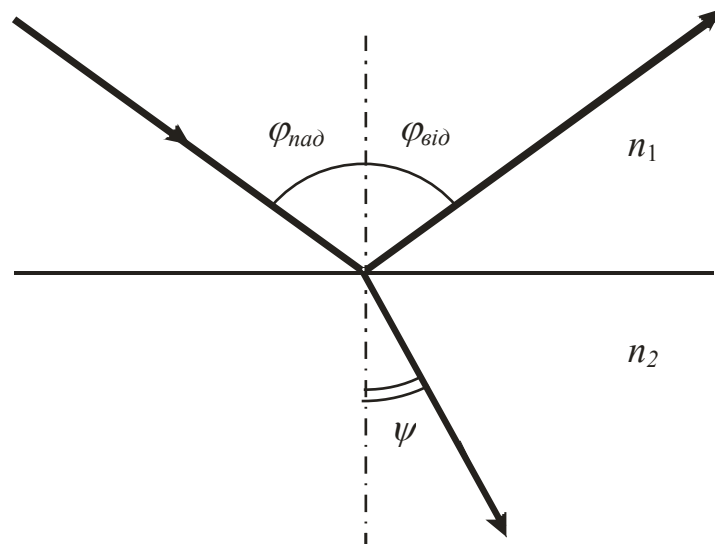


Рис. 12.1. Заломлення променя світла на межі розділу середовищ

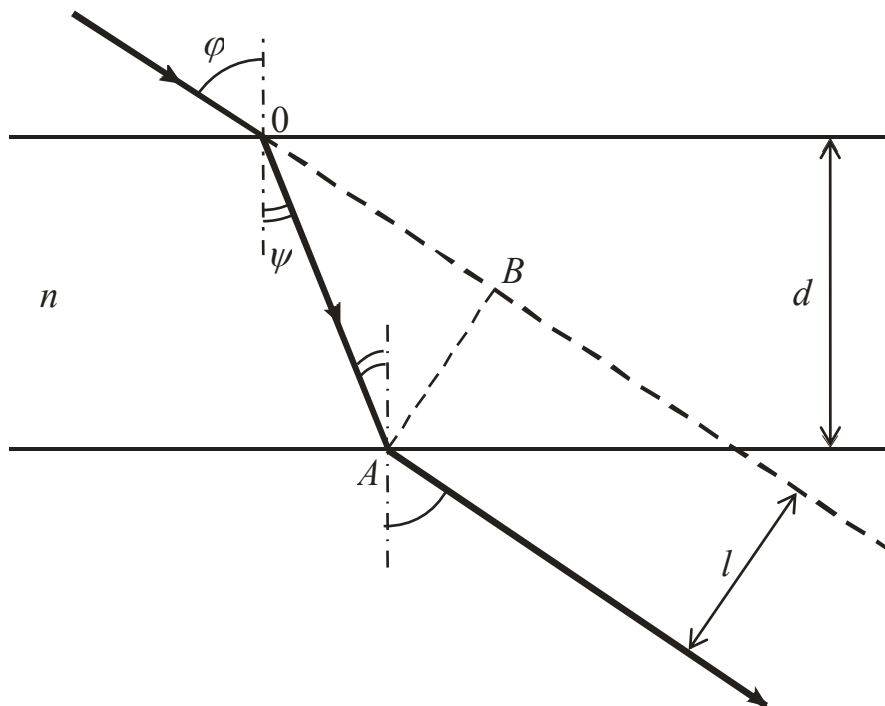


Рис. 12.2. Проходження променя світла через пластину

Вимірявши кут падіння променя φ , товщину пластини d і зсув l променя, що пройшов, за допомогою формули (12.3) можна визначити показник заломлення пластини n .

Зробимо для цього наступні математичні перетворення.

Використаємо відоме з тригонометрії співвідношення для синуса різниці двох кутів:

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi.$$

Підставимо його в чисельник формули (12.3) і поділимо почленно на знаменник. Після певних перетворень одержимо значення тангенса кута заломлення:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi - \frac{l}{d}}{\cos \varphi}.$$

Тепер за допомогою ще одного тригонометричного співвідношення можна знайти значення синуса кута заломлення:

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}.$$

Підставивши ℓ сюди отримане вище значення тангенсу, отримаємо:

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi - \frac{l}{d}} \right)^2 + 1}}.$$

Тепер за допомогою виразу закону Снелліуса, що зв'язує значення кутів падіння і заломлення отримаємо вираз для показника заломлення:

$$n = \sin \varphi \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi - \frac{l}{d}} \right)^2 + 1}. \quad (12.4)$$

Порядок виконання роботи

1. Зібрати прилад, схема якої показана на рис. 12.3. Пластину 1 з плексигласу помістити на столик поворотної платформи 2.
2. Установити на відліковій шкалі платформи 0° .
3. Включити лазер 3.
4. Установити пластину 1 так, щоб відбитий від її поверхні промінь ішов у напрямку, зворотному до напрямку падаючого променя. Це відповідає куту падіння променя на пластину $\varphi = 0^\circ$.
5. До поверхні екрана 4 прикріпити аркуш паперу. Відзначити на ньому місце попадання променя лазера при $\varphi = 0^\circ$.

6. Установити за допомогою поворотної платформи кут падіння променя на пластину $\varphi = 10^\circ$. Відзначити на екрані місце попадання променя, який пройшов через пластину.

7. Повторити вимірювання за п. 6 при кутах падіння променя 20° , 30° , 40° , 50° .

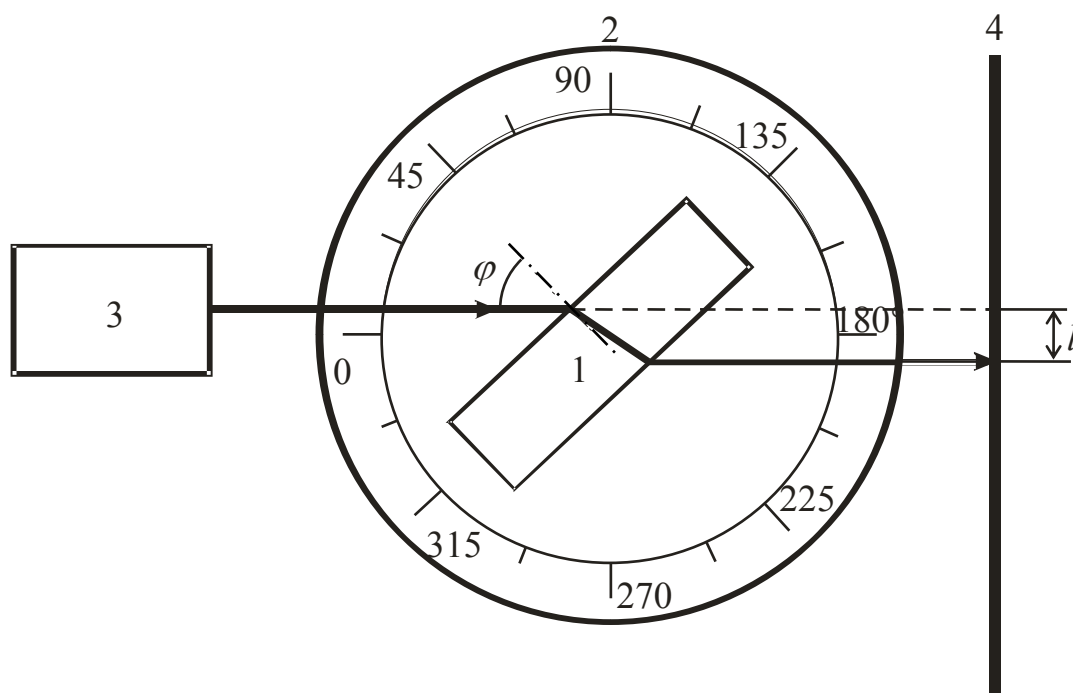


Рис. 12.3. Схема експериментального приладу:
 1 – пластину, 2 – поворотна платформа, 3 – лазер, 4 – екран

8. Зняти аркуш паперу з екрану. Виміряти зсув променя l при кожному куті падіння. Результати вимірювань занести в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Вимірювання показника заломлення

i	φ°	l_i , мм	n_i	$(n_i - n_{сер})^2$
1				
2				
3				
4				
5				

9. За формулою (12.4) обчислити показник заломлення для кожного вимірювання. Результати занести в таблицю. Товщину пластини вважати рівною $d = 50$ мм.

10. Обчислити середнє значення показника заломлення $n_{\text{сер}}$. Оцінити величину абсолютної Δn і відносної $\Delta n/n$ похибки результату вимірювань за правилами оцінки похибки ряду вимірювань (розділ 1.4.2).

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок схему експериментальної установки;
- теоретичні співвідношення;
- таблиці з результатами експерименту і розрахунку АЧХ для фільтрів нижніх і верхніх частот;
- таблиці з результатами експерименту і поточними обчисленнями;
- результати вимірювань показника заломлення і похибки вимірювань.

Контрольні питання

1. Що таке показник заломлення середовища? Його зв'язок зі швидкістю світла в середовищі.
2. Відбиття і заломлення світла на межі розділу середовищ. Закони Снелліуса.
3. Проходження світла через плоскопаралельну пластину. Вивести формулу (12.3).
4. Визначення показника заломлення за зсувом променя на виході з пластини. Вивести формулу (12.4).
5. Порядок виконання вимірювань показника заломлення.
6. Оцінка похибки результату вимірювань.

Робота № 13

ВИМІРЮВАННЯ ДОВЖИНИ ХВИЛІ ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФРАКЦІЙНОЇ ГРАТКИ

Мета роботи

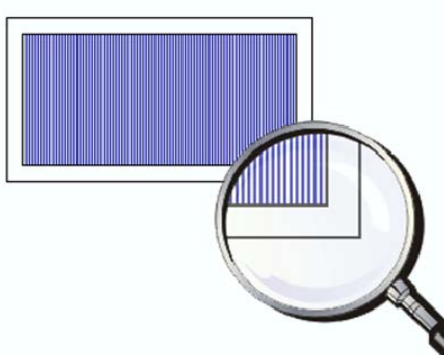
Дослідження дифракційної ґратки, вимірювання довжини хвилі лазерного випромінювання.

Теоретичні відомості

Лазером називається пристрій, який генерує когерентні електромагнітні хвилі шляхом вимушеного випромінювання світла активним середовищем, що знаходиться в резонаторі. Лазер складається з таких вузлів: випромінювача, системи підкачки і джерела живлення. У випромінювачі відбувається перетворення енергії підкачки на лазерне випромінювання. Він має оптичний резонатор – систему з двох паралельних дзеркал (повністю відбиваючого і напівпрозорого), між якими знаходиться активне середовище (газ, рідина або тверде тіло). Дзеркала забезпечують багаторазове проходження випромінювання через активне середовище. При цьому випромінювання підсилюється. Система підкачки призначається для перетворення енергії джерела електричного живлення на енергію активного середовища. У лазері, який використовується в лабораторній роботі, підкачка здійснюється електричним струмом. Він збуджує атоми активного середовища (напівпровідникового кристала), які випромінюють енергію при поверненні в початковий (не збуджений) стан.

Лазерне випромінювання має високу когерентність і монохроматичність. Тому за його допомогою легко спостерігати явища, обумовлені хвильовою природою світла, зокрема дифракцію. Дифракцією називається обгинання світлом перешкод, що супроводжується проникненням хвилі в область геометричної тіні.

Явище дифракції яскраво проявляється при проходженні світла через дифракційну ґратку – систему щілин, розташованих на певній відстані одна від одної (рис. 13.1). При виготовленні ґратки на поверхню скла різцем наносяться лінії, розташовані на певній відстані одна від одної. Таким чином, чергуються прозорі і непрозорі для світла ділянки. Існують також металеві дифракційні ґратки, які працюють на відбитті світла. Ширина щілин a і відстань b між ними визначають період ґратки $c = a + b$ (сталу дифракційної ґратки).



При нормальному падінні монохроматичної хвилі на ґратку розподіл інтенсивності світла за нею описується формулою

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} \sin \frac{\pi N c \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} \sin \frac{\pi c \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2, \quad (13.1)$$

Рис. 13.1. Дифракційна ґратка

де I_0 – інтенсивність падаючого світла, λ – довжина хвилі, N – кількість освітлених щілин ґратки, α – кут падіння світла.

Коли значення кутів α задовольняють умову

$$c \sin \alpha_n = \pm n \lambda, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.2)$$

функція $I(\alpha)$ приймає максимальні значення, які називаються головними максимумами. Вони розташовані симетрично до центрального максимуму. Між ними знаходяться додаткові максимуми, інтенсивність яких є значно меншою від інтенсивності головних максимумів (рис. 13.2).

Зі співвідношення (13.2) випливає, що, вимірявши один з кутів α_n і знаючи період ґратки c , можна знайти довжину хвилі випромінювання, яке падає на ґратку:

$$\lambda = \frac{c \sin \alpha_n}{n \alpha_n}. \quad (13.3)$$

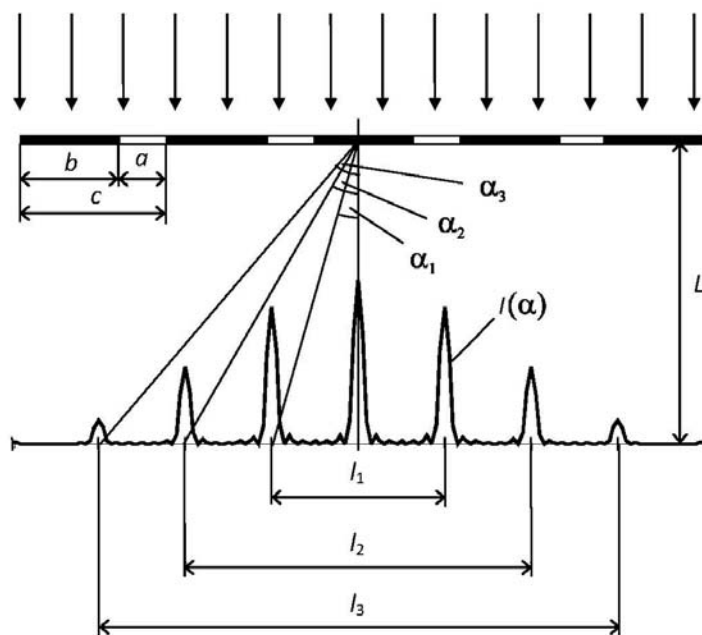


Рис. 13.2. Розподіл інтенсивності світла за дифракційною ґраткою

Експериментальний пристрій

Деталі приладу розташовані на оптичній лаві 1 (рис. 13.3). Джерелом світла служить лазер 2. Його промінь падає на дифракційну ґратку 3. Дифракційна картина спостерігається на екрані 4.

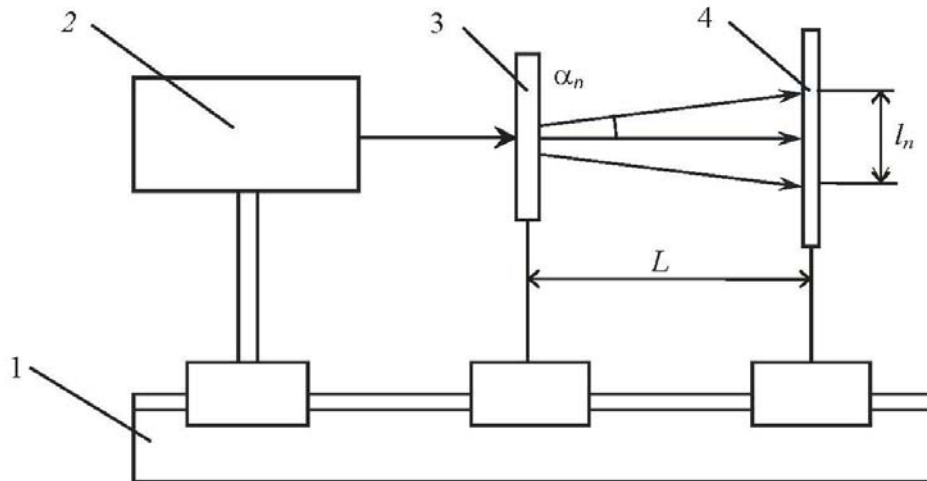


Рис. 13.3. Експериментальний пристрій

Порядок виконання роботи

1. Укріпити в держаку дифракційну ґратку 3, встановити її на оптичну лаву 1 і розташувати площину ґратки перпендикулярно до променя лазера. На екрані 4 буде видно дифракційну картину.

2. Виміряти відстань L між ґраткою та екраном. Результат записати в таблицю.

3. Виміряти відстань l_1 між максимумами першого порядку. Виконати аналогічні вимірювання відстаней l_n для максимумів другого, третього порядків тощо. Результати записати в таблицю.

4. Обчислити кути α_n за формулою (13.4). Результати записати в таблицю.

$$\alpha_n = \arctg \frac{l_n}{2L}. \quad (13.4)$$

5. За формулою (13.3) обчислити довжину хвилі випромінювання λ для кожного кута α_n . Результати записати в табл. 13.1.

6. Повторити вимірювання 5 разів за різних відстаней L .

7. Обчислити середню довжину хвилі випромінювання лазера λ , абсолютну похибку $\Delta\lambda$ і відносну похибку $\Delta\lambda/\lambda$ за методикою, викладеною вище в розділі 1.4.2.

Таблиця 13.1

Результати вимірювань

n	L , мм	l_n , мм	α_n , град	λ , мкм	$(\lambda_n - \lambda_{сер})^2$ мкм ²
1					
2					
3					
4					
5					

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок-схему установки;
- формули для обчислення довжини хвилі випромінювання лазера;
- таблиці з результатами експерименту і розрахунків.

Контрольні питання

1. Будова і принцип дії лазера.
2. Особливості лазерного випромінювання?
3. Що таке дифракція світла?
4. Що таке дифракційна ґратка?
5. Умова головних максимумів для дифракційної ґратки.
6. Процес виконання роботи.

Робота № 14**ВИМІРЮВАННЯ ДІАМЕТРА ТА ПОКАЗНИКА
ЗАЛОМЛЕННЯ СКЛОВОЛОКНА****Мета роботи**

Дослідження дифракції лазерного випромінювання на циліндричному волокні. Вимірювання діаметра прозорого скловолокна та його показника заломлення. Оцінка похибки вимірювань.

**Розсіяння електромагнітної хвилі
на круговому циліндрі**

Геометрію задачі показано на рис. 14.1.

Круговий циліндр діаметром $d = 2a$ (a – радіус циліндра) розташований так, що координатна вісь Oz проходить уздовж його осі. Вектор Умова–Пойнтінга S хвилі спрямований вздовж координатної осі Oy . Можливі випадки, коли вектор E хвилі є паралельним осі циліндра (E -хвиля) і коли він є перпендикулярним їй (H -хвиля). Випадок довільної поляризації – це лінійна комбінація таких двох випадків.

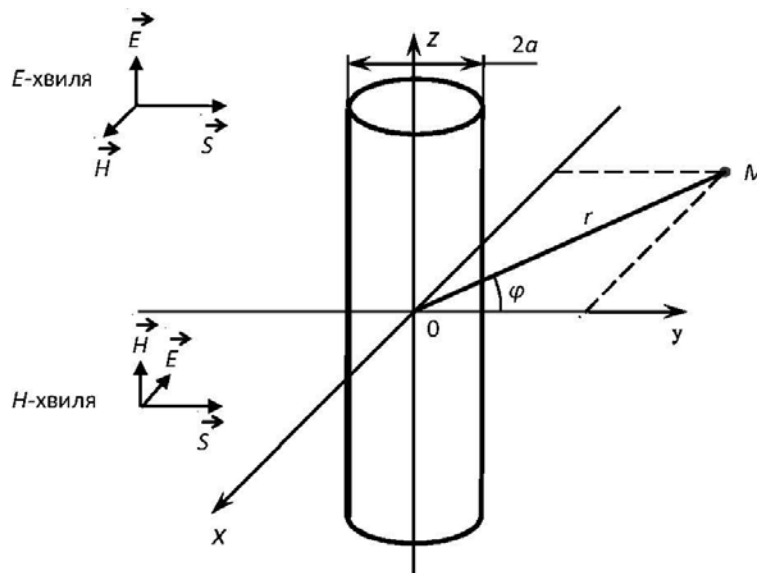


Рис. 14.1. Геометрія задачі

Для аналізу стаціонарного режиму у випадку E -хвилі необхідно розв'язати рівняння Гельмгольца

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0 \quad (14.1)$$

за наступних граничних умови:

$$E_z^i \Big|_{r=a} = E_z^0 \Big|_{r=a} + E_z^a \Big|_{r=a}, \quad (14.2)$$

$$\frac{\partial E_z^i}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial E_z^0}{\partial r} \Big|_{r=a} + \frac{\partial E_z^a}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (14.3)$$

Вони означають безперервність тангенціальної складової електричного поля на границі розділу середовищ.

Тут $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, ω – кругова частота, c – швидкість світла у зовнішньому середовищі, λ – довжина хвилі випромінювання. Вважаємо, що зовнішнє середовище – це вільний простір. Індeksi 0, a та i відносяться до падаючої хвилі, розсіяною хвилі і до поля всередині циліндра.

Крім компоненти E_z , існують компоненти H_ϕ и H_r , які можуть бути знайдені за формулами, що впливають з рівнянь Максвелла:

$$H_\phi = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad H_r = \frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi}. \quad (14.4)$$

Тут $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна проникність вільного простору, $\mu = \mu_{\hat{a}\hat{a}i} \mu_0$ – магнітна проникність середовища. Далі будемо вважати, що для зовнішнього простору та для матеріалу циліндра відносна магнітна проникність $\mu_{\hat{a}\hat{a}i} = 1$.

У разі H -хвилі математична постановка задачі буде такою:

$$\Delta H_z + k^2 H_z = 0, \quad (14.5)$$

$$H_z^i \Big|_{r=a} = H_z^0 \Big|_{r=a} + H_z^a \Big|_{r=a}, \quad (14.6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial H_z^i}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_z^0}{\partial r} \Big|_{r=a} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_z^a}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (14.7)$$

$$E_\phi = \frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial r}, \quad E_r = -\frac{i}{\omega\varepsilon r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}. \quad (14.8)$$

Тут $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – діелектрична проникність вільного простору, $\varepsilon = \varepsilon_{\hat{a}\hat{a}i} \varepsilon_0$ – діелектрична проникність зовнішнього середовища, $\varepsilon_i = \varepsilon_{\hat{a}\hat{a}i} \varepsilon_0$ – діелектрична проникність речовини циліндра. Відносна діелектрична проникність зовнішнього середовища дорівнює 1.

Речовину циліндра можна також характеризувати показником заломлення $m = \sqrt{\varepsilon_{\hat{a}\hat{a}i}}$. У загальному випадку це комплексна величина.

Нижче наведено розв'язання рівнянь (14.1)–(14.4) для E -хвилі. Зручно використовувати циліндричні координати.

Падаюча хвиля:

$$E_z^0 = E_0 e^{-ikr \cos \varphi} = E_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l J_l(kr) \cos l\varphi,$$

$$H_\varphi^0 = -\frac{kE_0}{\omega\mu} e^{-ikr \cos \varphi} \cos \varphi = -\frac{ikE_0}{\omega\mu} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l J_l'(kr) \cos l\varphi,$$

$$H_r^0 = -\frac{kE_0}{\omega\mu} e^{-ikr \cos \varphi} \sin \varphi = -\frac{iE_0}{\omega\mu r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l J_l(kr) \sin l\varphi.$$

Розсіяна хвиля:

$$E_z^a = -E_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l b_l H_l^{(2)}(kr) \cos l\varphi,$$

$$H_\varphi^a = \frac{ikE_0}{\omega\mu} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l b_l H_l^{(2)'}(kr) \cos l\varphi, \quad (14.9)$$

$$H_r^a = \frac{iE_0}{\omega\mu r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l b_l H_l^{(2)}(kr) \sin l\varphi.$$

Поле всередині циліндра:

$$E_z^i = E_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l d_l J_l(k_i r) \cos l\varphi,$$

$$H_\varphi^i = -\frac{ik_1 E_0}{\omega\mu_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l d_l J_l'(k_i r) \cos l\varphi,$$

$$H_r^i = -\frac{iE_0}{\omega\mu_1 r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l d_l J_l(k_i r) \sin l\varphi.$$

У цих виразах $J_l(z)$ – функція Бесселя, $Y_l(z)$ – функція Неймана, $H_l^{(2)}(z) = J_l(z) - i Y_l(z)$ – функція Ханкеля 2-го роду, штрих позначає похідну функції по всьому аргументу, $k_i = m k$ – хвильове число речовини циліндра.

Коефіцієнти b_l і d_l описуються наступними виразами:

$$b_l = \frac{m J'_l(m\rho) J_l(\rho) - J_l(m\rho) J'_l(\rho)}{m J'_l(m\rho) H_l^{(2)}(\rho) - J_l(m\rho) H_l^{(2)'(\rho)}}, \quad (14.10)$$

$$d_l = \frac{2i}{\pi\rho} \frac{1}{m J'_l(m\rho) H_l^{(2)}(\rho) - J_l(m\rho) H_l^{(2)'(\rho)}}, \quad (14.11)$$

де $\rho = 2\pi a/\lambda$.

Показник заломлення $m = n - i\kappa$ – комплексна величина. У ньому дійсна частина визначає зміну фази хвилі, уявна – зміну амплітуди.

Розв'язання рівнянь (14.5)–(14.8) для H -хвилі показано нижче.

Падаюча хвиля:

$$\begin{aligned} H_z^0 &= H_0 e^{-ikr \cos \varphi} = H_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l J_l(kr) \cos l\varphi, \\ E_\phi^0 &= \frac{kH_0}{\omega \varepsilon} e^{-ikr \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{i k H_0}{\omega \varepsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l J'_l(kr) \cos l\varphi, \\ E_r^0 &= \frac{kH_0}{\omega \varepsilon} e^{-ikr \cos \varphi} \sin \varphi = \frac{i H_0}{\omega \varepsilon r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l J_l(kr) \sin l\varphi. \end{aligned}$$

Розсіяна хвиля:

$$\begin{aligned} H_z^a &= -H_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l a_l H_l^{(2)}(kr) \cos l\varphi, \\ E_\phi^a &= -\frac{i k H_0}{\omega \varepsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l a_l H_l^{(2)'(kr)} \cos l\varphi, \\ E_r^a &= -\frac{i H_0}{\omega \varepsilon r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l a_l H_l^{(2)}(kr) \sin l\varphi. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Поле всередині циліндра:

$$\begin{aligned} H_z^i &= H_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l c_l J_l(k_i r) \cos l\varphi, \\ E_\phi^i &= \frac{i k_1 H_0}{\omega \varepsilon_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l c_l J'_l(k_i r) \cos l\varphi, \\ E_r^i &= \frac{i H_0}{\omega \varepsilon_1 r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^l l c_l J_l(k_i r) \sin l\varphi. \end{aligned}$$

Тут

$$a_l = \frac{m J_l(m\rho) J_l'(\rho) - J_l'(m\rho) J_l(\rho)}{m J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho) - J_l'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho)}, \quad (14.13)$$

$$c_l = -\frac{2im}{\pi\rho} \frac{1}{m J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho) - J_l'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho)}. \quad (14.14)$$

Індикатриса розсіяння випромінювання

Розподіл у просторі інтенсивності випромінювання, розсіяного циліндром, характеризується індикатрисою розсіяння:

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*). \quad (14.15)$$

Обмежимося випадком E -хвилі. Вектор \vec{I} має наступні компоненти:

$$\vec{I} = -\frac{1}{2} E_z H_\phi^* \vec{r} + \frac{1}{2} E_z H_r^* \vec{\phi}, \quad (14.16)$$

Другий доданок в цьому виразі відіграє істотну роль лише в ближній зоні. У дальній зоні ($r \gg d^2/\lambda$) він набагато менше від першого доданка. У нашому випадку другим доданком в (14.16) можна знехтувати, оскільки його величина залежить від відстані як $1/r$, в той час як перший доданок залежить від відстані слабше.

Для $d = 100$ мкм і $\lambda = 0,65$ мкм виходить:

$$\frac{d^2}{\lambda} \approx 16 \text{ мм.}$$

Умова дальньої зони в цьому випадку виконується, починаючи з відстані близько 160 мм від осі циліндра.

Вирази для компонент розсіяного поля в дальній зоні виглядають так:

$$E_z^a = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} T(\varphi), \quad (14.17)$$

$$H_\varphi^a = -E_z^a \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}},$$

де

$$T(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \cos(l\varphi).$$

Зі співвідношення (14.15) випливає, що

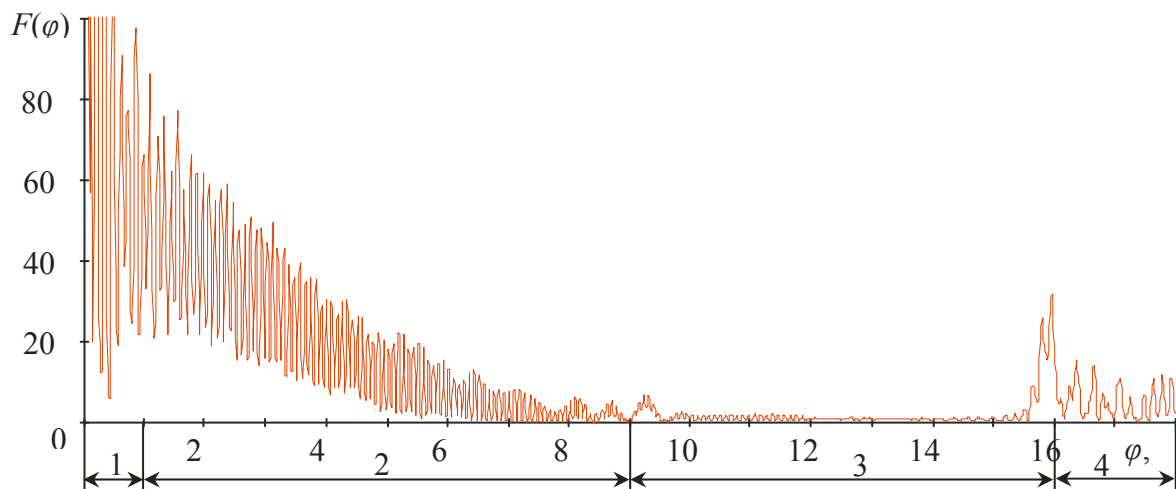
$$I(r, \varphi) = I_0 \frac{2}{\pi k r} F(\varphi), \quad (14.18)$$

де

$$F(\varphi) = |T(\varphi)|^2. \quad (14.19)$$

Тут I_0 – інтенсивність падаючого випромінювання, φ – кут розсіяння (кут між напрямом поширення падаючого випромінювання та напрямом на точку спостереження).

На рис. 14.2 показано результати розрахунків за формулою (14.19) для випадку дифракції лазерного випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,65$ мкм на скляному волокні діаметром 50 мкм з показником заломлення 1,5.



**Рис. 14.2. Індикатриса розсіяння
(декартові координати)**

На графіку виділяються такі характерні області.

1. *Область розсіяння вперед* ($0 < \varphi < 10^\circ$). Тут існує центральний пелюсток індикатриси розсіяння дуже великої інтенсивності ($F(0) \approx 66000$) і значно слабші бічні пелюстки ($F(1^\circ) \approx 2000$). У більшому масштабі це показано на рис. 14.3. Ширина пелюстків визначається співвідношенням діаметра циліндра та довжини хвилі випромінювання і показником заломлення циліндра.

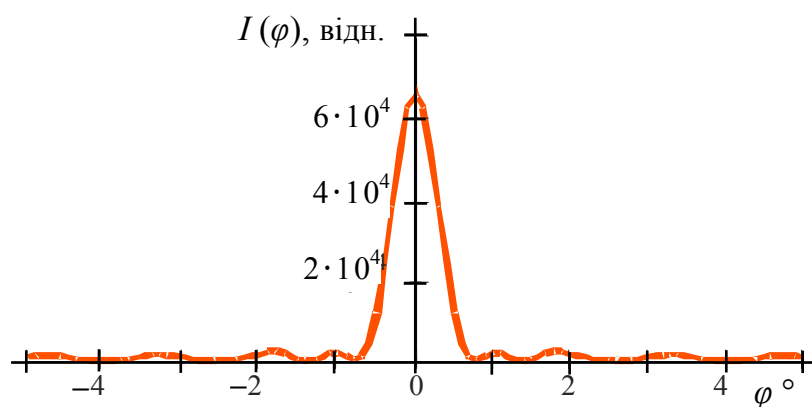


Рис. 14.3. Індикатриса розсіяння (область розсіяння вперед)

2. Область бічного розсіяння ($10 < \varphi < 90^\circ$). Це область регулярних пелюстків з інтенсивністю, що поступово зменшується (до $F(90^\circ) \approx 100$). У більшому масштабі вона показана на рис. 14.4.

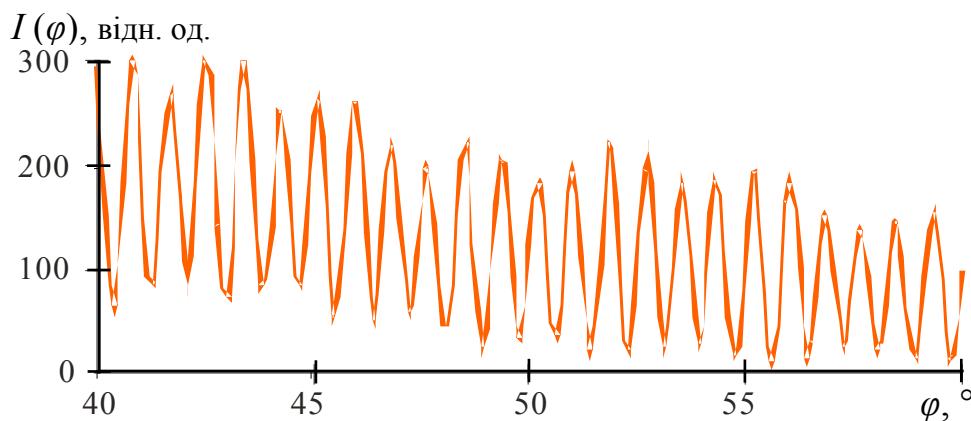
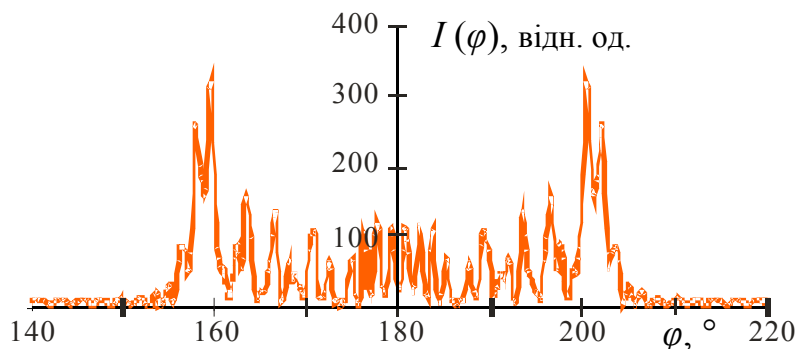


Рис. 14.4. Індикатриса розсіяння (область бічного розсіяння)

3. Область кутів від 90° до 160° . Тут інтенсивність розсіяного випромінювання є дуже малою ($F(\varphi) \approx 10$). Це добре видно на рис. 14.2.

4. Область кутів від 90° до 160° . Інтенсивність розсіяного випромінювання є дуже малою ($F(\varphi) \approx 10$). Це добре видно на рис. 14.5. Ширина цієї області для товстих циліндрів (порівняно з довжиною хвилі) визначається тільки показником заломлення і не залежить від діаметра циліндра.

Рис. 14.5. Індикатриса розсіяння (область розсіяння назад)



На рис. 14.6 показана індикатриса розсіяння у вигляді графіка в полярних координатах. Інтенсивність відкладено в логарифмічному масштабі, щоб можна було порівняти інтенсивності, що відрізняються одна від одної більше ніж в 1000 разів. Добре видно центральний пелюсток в області розсіяння вперед, поступове зменшення інтенсивності до кута близько 160° і область більш високої інтенсивності випромінювання, розсіяного назад.

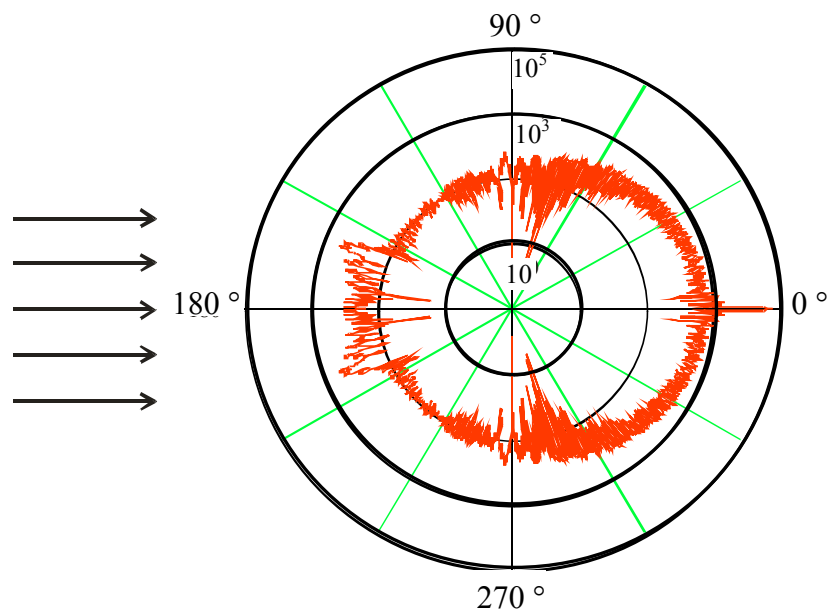


Рис. 14.6. Індикатриса розсіяння (полярні координати)

Порядок виконання роботи

1. Вимірювання показника заломлення скловолкна

1.1. Зібрати прилад, схема якого показана на рис. 14.7. Промінь лазера 1 проходить крізь отвір в екрані 2 і падає на скловолокно 3. Розсіяне назад випромінювання лазера потрапляє на екран. Там спостерігається «райдуга» – майже все випромінювання зосереджено між кутами $\pm\psi_{\max}$, причому на краях цієї області інтенсивність розсіяного світла є найбільшою. Значення кута ψ_{\max} залежить від показника заломлення n [1]:

$$\psi_{\max} = 4 \arcsin \left(\frac{4 - n^2}{3n^2} \right)^{1/2} - 2 \arcsin \left(\frac{4 - n^2}{3} \right)^{1/2}. \quad (14.20)$$

1.2. Виміряти відстань L від волокна до екрану і відстань l між областями максимальної інтенсивності розсіяного волокном світла. Оцінити похибки вимірювань цих величин – ΔL и Δl .

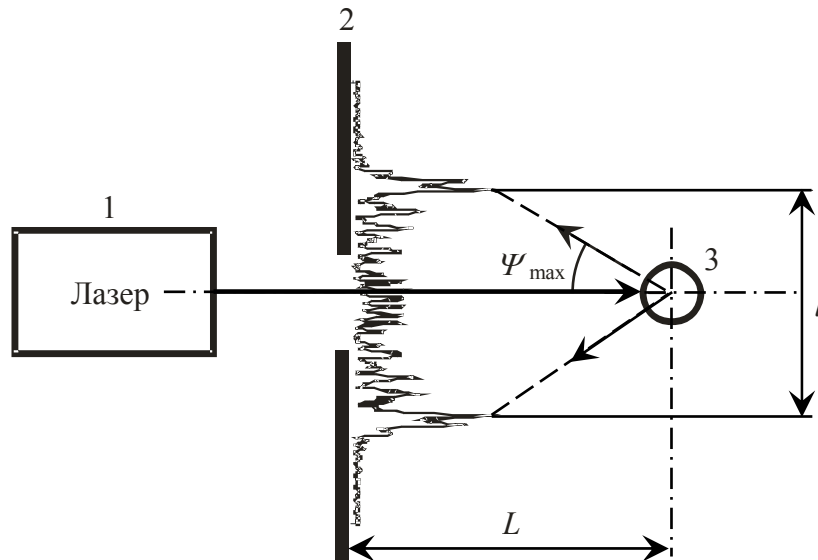


Рис. 14.7. Схема приладу для вимірювання показника заломлення скловолокна

1.3. Обчислити кут ψ_{\max} :

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{l}{2L}. \quad (14.21)$$

1.4. За допомогою формули (14.20) побудувати графік залежності ψ_{\max} (n). Орієнтовний вигляд графіка показано на рис. 14.8. За допомогою цього графіка визначити показник заломлення скловолокна.

Примітка. Допускається визначення показника заломлення за допомогою аналітичного або чисельного розв'язання рівняння (14.20).

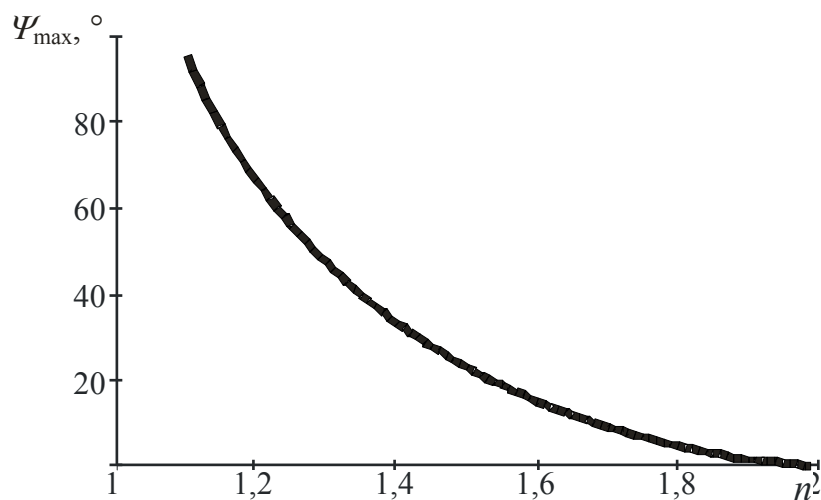


Рис. 14.8. Залежність кута «райдуги» від показника заломлення

1.5. Оцінити похибку визначення кута ψ_{\max} .

За правилами оцінки похибки непрямих вимірювань виходить наступна формула:

$$\Delta\Psi_{\max} = \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{L}\Delta L\right)^2 + (\Delta l)^2}}{2L\left[1 + \left(\frac{l}{2L}\right)^2\right]}. \quad (14.22)$$

Увага! Значення $\Delta\psi_{\max}$ – в радіанах.

1.6. За допомогою графіка $\psi_{\max}(n)$ оцінити похибку визначення показника заломлення.

2. Вимірювання діаметра скловолонна (область бічного розсіяння).

В області бічного розсіяння ($10 < \varphi < 90^\circ$) відстань між сусідніми дифракційними максимумами дорівнює [1]

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{d} \frac{\left(1 - \frac{2nB}{1+n^2}\right)^{1/2}}{B\left(1 - \frac{2nB}{1+n^2}\right)^{1/2} + \frac{nA}{(1+n^2)^{1/2}}}, \quad (14.23)$$

де λ – довжина хвилі випромінювання, d – діаметр волонна, n – показник заломлення, $A = \sin\frac{\varphi}{2}$, $B = \cos\frac{\varphi}{2}$.

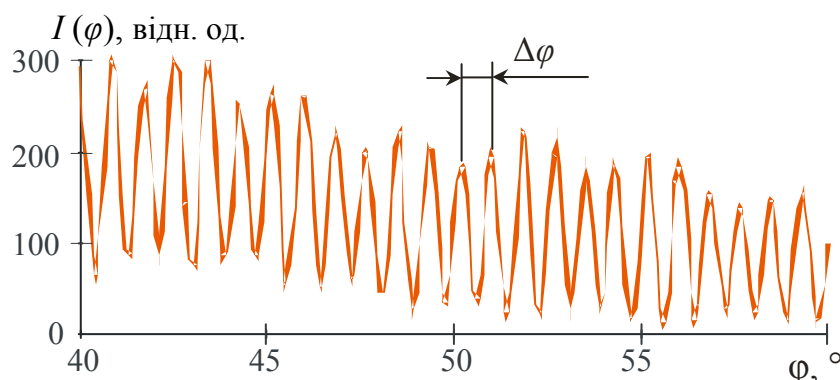


Рис. 14.9. Відстань між дифракційними максимумами

З формули (14.23) видно, що, якщо знати довжину хвилі, випромінювання і показник заломлення, можна визначити діаметр волонна:

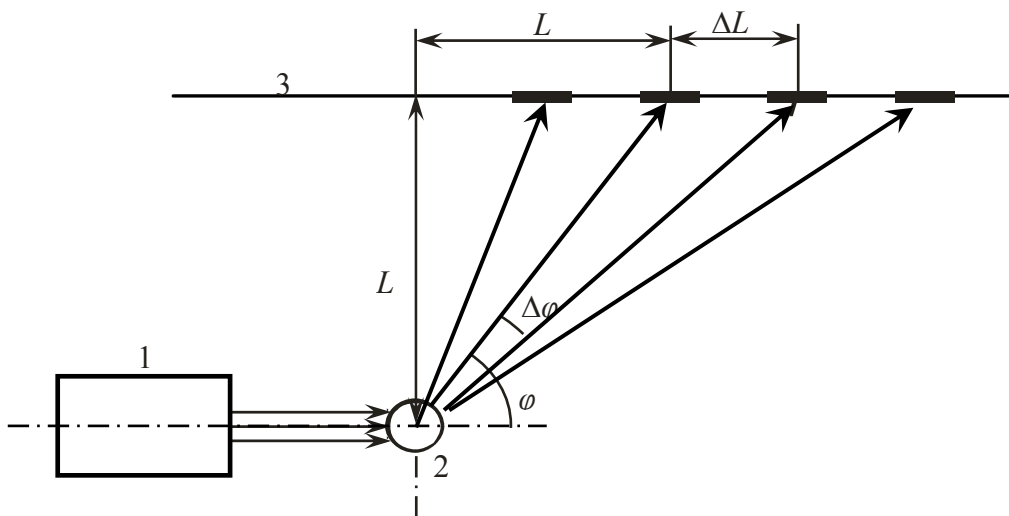
$$d = \frac{2\lambda \left(1 - \frac{2nB}{1+n^2}\right)^{1/2}}{\Delta\varphi \left[B \left(1 - \frac{2nB}{1+n^2}\right)^{1/2} + \frac{nA}{(1+n^2)^{1/2}} \right]}. \quad (14.24)$$

2.1. Зібрати експериментальний прилад, схема якого показана на рис. 14.10. Відстані L_1 і L_2 вибрати такими, щоб кут φ знаходився в межах від 20° до 50° . У цьому інтервалі кутів дифракційна картина найбільш чітка. На рис. 14.10 жирними відрізками позначені дифракційні максимуми – світлові плями на екрані.

2.2. Виміряти відстані L_1 , L_2 і ΔL .

2.3. Обчислити значення кутів φ і $\Delta\varphi$, використовуючи формули

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L_1}{L_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi - \Delta\varphi) = \frac{L_1}{L_2 + \Delta L}. \quad (14.25)$$



**Рис. 14.10. Схема приладу для вимірювання діаметра скловолокна:
1 – лазер, 2 – волокно, 3 – екран**

2.4. За формулою (14.23) обчислити значення діаметра скловолокна. Значення показника заломлення взяти з результатів вимірювань, виконаних раніше. Довжина хвилі випромінювання лазера $\lambda = 0,65$ мкм.

2.5. Вимірювання й обчислення пп. 2.2–2.4 зробити 5 раз для різних значень відстаней L_1 і L_2 . Результати занести в таблицю 14.1.

2.6. Обчислити середнє значення діаметра волокна. Оцінити величину абсолютної Δd і відносної $\Delta d/d$ похибок результату вимірювань за правилами оцінки похибки ряду вимірювань (розділ 1.4.2).

Таблиця 14.1

Вимірювання діаметра скловолокна

i	$L_1, \text{мм}$	$L_2, \text{мм}$	$\Delta L, \text{мм}$	φ°	$\Delta\varphi^\circ$	$d_i, \text{мкм}$	$\frac{(d_i - d_{\text{сер}})^2}{\text{мкм}^2}$
1							
2							
3							
4							
5							

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок схему експериментальної установки;
- теоретичні співвідношення;
- таблиці з результатами експерименту і розрахунками;
- результати вимірювань і похибку.

Контрольні питання

1. Що таке дифракція світла?
2. Картина розсіяння електромагнітної хвилі на циліндрі. Характерні області розсіяння.
3. Розподіл у просторі випромінювання, розсіяного назад. Вимірювання показника заломлення скловолокна. Оцінка похибки результатів вимірювань.
4. Розподіл у просторі випромінювання, розсіяного в області кутів від 10° до 90° . Вимірювання діаметра скловолокна. Оцінка похибки результатів вимірювань.

Робота № 15

ВИМІРЮВАННЯ ДІАМЕТРА ВОЛОКНА ДИФРАКЦІЙНИМ МЕТОДОМ В ОБЛАСТІ РОЗСІЯННЯ СВІТЛА ВПЕРЕД

Мета роботи

Дослідження дифракційної картини лазерного випромінювання на непрозорому волокні в області розсіяння вперед. Вимірювання діаметра волокна. Оцінка похибки вимірювань [18-22].

Розсіяння електромагнітної хвилі на круговому циліндрі

Геометрію задачі показано на рис. 15.1. Круговий циліндр радіусом a (діаметр $d = 2a$) розташований так, що координатна вісь Oz проходить уздовж його осі. Вектор Умова–Пойнтінга S -хвилі спрямований вздовж координатної осі Oy . Можливі випадки, коли вектор E -хвилі є паралельним осі циліндра (E -хвиля) і коли він є перпендикулярним їй (H -хвиля). Випадок довільної поляризації можна розглядати як комбінацію цих двох випадків.

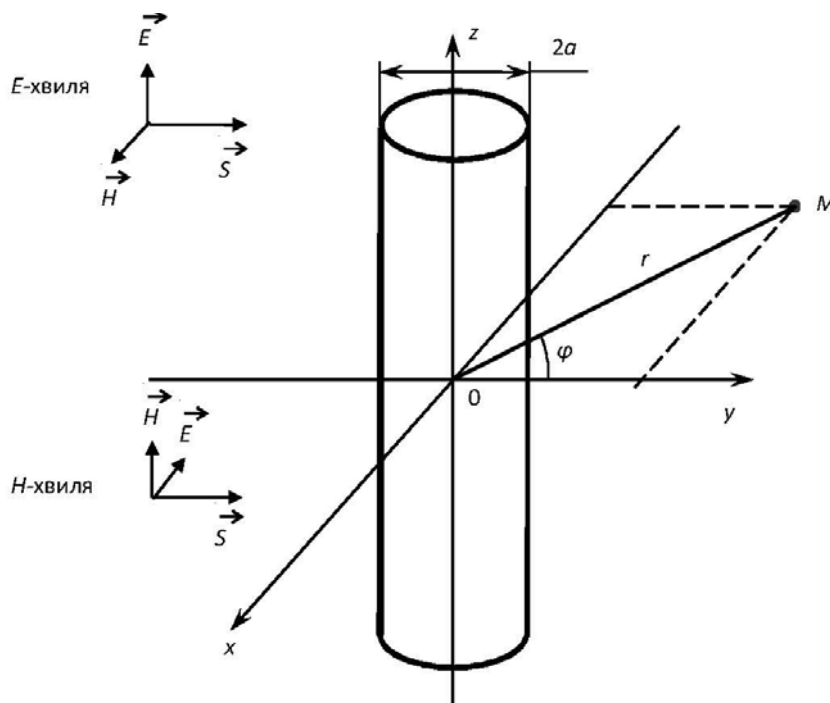


Рис. 15.1. Геометрія задачі

Розв'язок задачі розглянуто в роботі № 14 «Вимірювання діаметра та показника заломлення скловолокна».

Розподіл у просторі інтенсивності розсіяного випромінювання характеризується індикатрисою розсіяння:

$$F(\varphi) = |T(\varphi)|^2, \quad (15.1)$$

де φ – кут розсіяння (кут між напрямом поширення падаючого випромінювання і напрямом на точку спостереження).

Тут для E -хвилі

$$T(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \cos(l\varphi),$$

$$b_l = \frac{m J'_l(m\rho) J_l(\rho) - J_l(m\rho) J'_l(\rho)}{m J'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho) - J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho)},$$

$J_l(z)$ – функція Бесселя, $Y_l(z)$ – функція Неймана, $H_l^{(2)}(z) = J_l(z) - iY_l(z)$ – функція Ханкеля 2-го роду, штрих позначає похідну по всьому аргументу, k – хвильове число для вільного простору, $k_i = mk$ – хвильове число для речовини циліндра, $\rho = 2\pi a/\lambda$. Показник заломлення $m = n - ik$ – комплексна величина. У ньому дійсна частина визначає зміну фази хвилі, уявна – зміну амплітуди.

Для H -хвилі:

$$T(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cos(l\varphi),$$

$$a_l = \frac{m J_l(m\rho) J'_l(\rho) - J'(m\rho) J_l(\rho)}{m J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho) - J'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho)}.$$

На рис. 15.2 показано результати розрахунку за формулою (15.1) для випадку дифракції лазерного випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,65$ мкм на скляному волокні діаметром 50 мкм з показником заломлення 1,5 в області розсіяння вперед.

Розрахунок індикатрисы розсіяння за формулою (15.1) є трудомістким, оскільки необхідно використовувати складні вирази, що включають функції Бесселя та Ханкеля комплексного аргументу, і ряди, довжина яких залежить від співвідношення між діаметром волокна і довжиною хвилі випромінювання лазера.

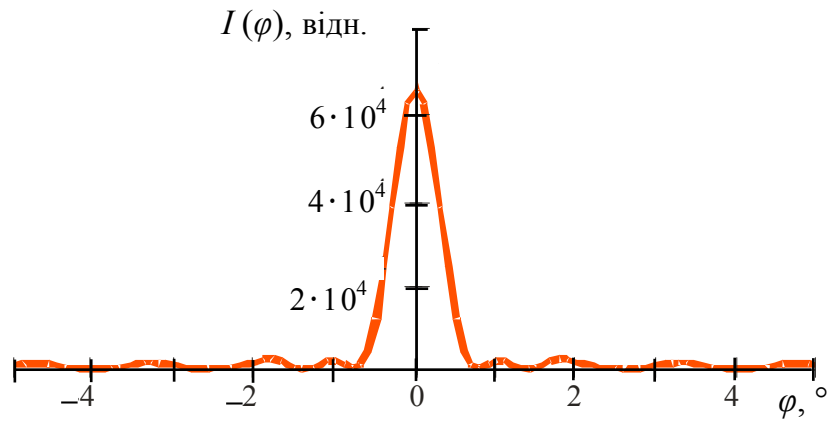


Рис. 15.2. Індикатриса розсіювання (область розсіювання вперед)

Вимірювання діаметра непрозорого волокна.

Для товстого непрозорого циліндра ($d \gg \lambda$, $\rho \gg 1$) форму індикатриси в області розсіювання вперед ($\varphi \ll 1$) з великою точністю можна описати простою формулою

$$F(\varphi) = \rho^2 \left[\frac{\sin(\rho\varphi)}{\rho\varphi} \right]^2. \tag{15.2}$$

З цього виразу видно, що в області розсіювання вперед існує ряд пелюстків випромінювання, межі між якими (мінімумами) визначаються нулями функції $\sin(\rho\varphi)$:

$$\rho\varphi_{k \min} = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{15.3}$$

З урахуванням того, що $\rho = \pi d/\lambda$, з виразу (15.3) випливає формула для визначення діаметра волокна:

$$d = \frac{k \lambda}{\varphi_{k \min}}, \tag{15.4}$$

де λ – довжина хвилі випромінювання, $\varphi_{k \min}$ – положення k -го мінімуму індикатрисы розсіювання.

Порядок виконання роботи

1. Зібрати експериментальний прилад, схема якої показана на рис. 15.3. Луч від лазера 1 потрапляє на волокно 2. На екрані 3 спостерігається картина розсіяного волокном світла 4.

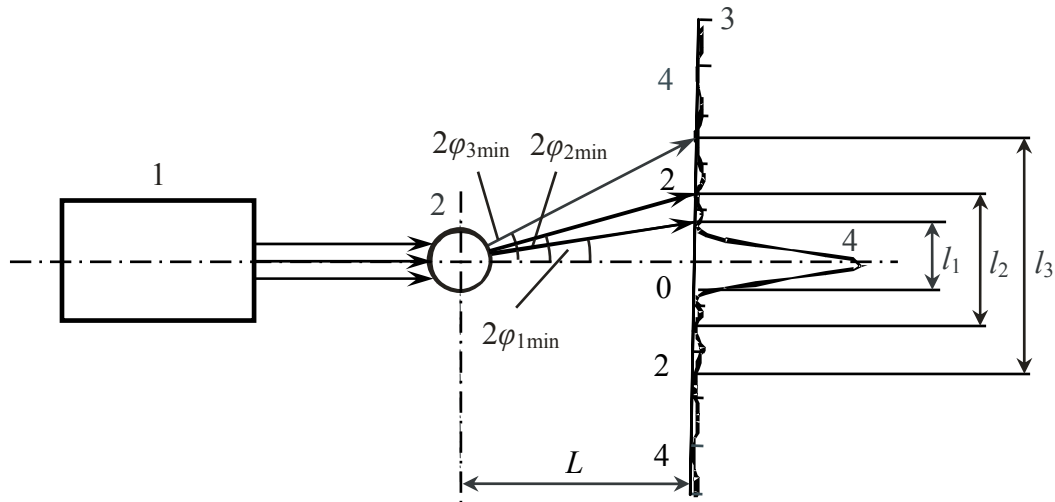


Рис. 15.3. Схема експериментального приладу:
 1 – лазер, 2 – волокно, 3 – екран, 4 – дифракційна картина

2. Виміряти відстань L від волокна 2 до екрану 3 і одну з відстаней l_k між дифракційними мінімумами k -го порядку, симетрично розташованими відносно центра дифракційної картини. Зробити 5 вимірювань з різними значеннями L і l_k . Результати вимірювань занести в табл. 15.1.

Таблиця 15.1

Результати вимірювань

i	L , мм	k	l_k , мм	φ_k , град	d_i , мкм	$(d_i - d_{сер})^2$, мкм ²
1						
2						
3						
4						
5						

3. Використовуючи формулу

$$\text{tg } \varphi_k = \frac{l_k}{2L},$$

обчислити значення кутів φ_k і занести їх значення в табл. 15.1.

4. За формулою (15.4) обчислити величину діаметра волокна для кожного i -го вимірювання. Занести їх значення в табл. 15.1. Довжина хвилі випромінювання лазера $\lambda = 0,65$ мкм.

5. Обчислити середнє значення діаметра волокна. Оцінити величину абсолютної Δd і відносної $\Delta d/d$ похибки результату вимірювань за правилами оцінки похибки ряду вимірювань (розділ 1.4.2).

Оформлення роботи

Звіт повинен містити:

- блок схему експериментальної установки;
- теоретичні співвідношення;
- таблиці з результатами експерименту і розрахунків;
- результати вимірювань діаметра скловолокна і похибки вимірювань.

Контрольні питання

1. Що таке дифракція світла?
2. Картина розсіяння електромагнітної хвилі на циліндрі в області розсіяння вперед.
3. Вимірювання діаметра волокна. Оцінка похибки результатів вимірювань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кассандрова О. Н. Обработка результатов наблюдений / О. Н. Кассандрова, В. В. Лебедев. – М. : Наука, 1970. – 104 с.
2. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях / И. П. Захаров, В.Д. Кукуш – Харьков : Консум, 2002. – 256 с.
3. Зеленский В. И. Руководство к лабораторным работам по физике : уч. метод. пособие / – В. И. Зеленский. – Ханты-Мансийск : Югорский гос. ун-т, 2006. – 37 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика / Дж. Сквайрс. – М. : Мир, 1971. – 246 с.
5. Шенк К. Теория инженерного эксперимента / К. Шенк – М. : Мир, 1972. – 381 с.
6. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений / Б. М. Щиголев. – М. : Наука, 1969. – 344 с.
7. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 349 с.
8. Свердан П. Л. Вища математика. Аналіз інформації у фармації та медицині / П. Л. Свердан. – Львів : Світ, 1998. – 332 с.
9. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. 3: Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – 428 с.
10. Савельев И. В. Курс общей физики / Савельев И. В. – М. : Наука, 1970. I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. – 517 с.
11. Лабораторные работы физического практикума с применением ЭВМ / под ред. М. Ф. Вукса. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1975. – 108 с.
12. Мирский Г. Я. Радиоэлектронные измерения / Г. Я. Мирский. – М. : Энергия, 1975. – 600 с.
13. Кукуш В. Д. Электрорадиоизмерения / В. Д. Кукуш. – М. : Радио и связь, 1985. – 368 с.
14. Дворяшин Б. В. Радиотехнические измерения / Б. В. Дворяшин, Л. И. Кузнецов – М. : Советское радио, 1978. – 360 с.
15. Электрические измерения (с лабораторными работами) / под ред. В. Н. Малиновского. – М. : Энергоиздат, 1983. – 392 с.
16. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1988. – 448 с.
17. Харкевич А. А. Спектры и анализ / А. А. Харкевич. – М. : Физматгиз, 1962. – 236 с.
18. Лазарев Л. П. Контроль геометрических и оптических параметров волокон / Л. П. Лазарев, С. Д. Мировицкая. – М. : Радио и связь, 1988. – 250 с.

19. Г. Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами; пер. с англ. / Г. Ван де Хюлст; под ред. В. В. Соболева. – М. : ИЛ, 1961. – 536 с.
20. Wait J. R. Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder an oblique incidence / J. R. Wait // Canadian journal of physics. – 1955. – Vol. 33, No. 5. – P. 189–195.
21. Lind A. C., Greenberg J. M. Electromagnetic scattering by obliquely oriented cylinders / A. C. Lind, J. M. Greenberg // Journal of applied physics. – 1966. – V. 37, No. 8. – P. 3195–3203.
22. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation / Kerker M. – New York – London: Academic Press, 1969. – 671 p.